



Integración de Monte Carlo

Técnicas Avanzadas de Gráficos en 3D

Miguel Ángel Otaduy
26 Abril 2010



Contexto

- Cálculo de la integral de radiancia reflejada en la ecuación de rendering
- Cálculo de la integral de caminos en la ecuación de transporte
- Cálculo de la integral de fuente transmitida en medios participativos



Contexto

- ¿Cómo se pueden calcular estas integrales?
 - Técnicas de integración numérica tradicionales (trapezoidal, cuadratura de Gauss...).
 - Problemas: dominios de alta dimensión, dificultad para subdividir el dominio...
- Aprox. probabilística: Monte Carlo



Índice

- Monte Carlo básico – estadística
- Técnicas de muestreo para transformación de probabilidades
- Técnicas de muestreo para mejora de eficiencia



Conceptos de Probabilidad

- Función de densidad de probabilidad

$$p(x) = Pr(X = x)$$

- Función de distribución de probabilidad

$$P(x) = Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(\tau) d\tau$$

$$P(x) = \sum_{-\infty}^x p(\tau)$$



Conceptos de Probabilidad

- Esperanza/media

$$E[f(x)] = \int f(x)p(x)dx$$

- Varianza

$$V[f(x)] = E[(f(x) - E[f(x)])^2]$$

mide la desviación media con respecto a la media



Conceptos de Probabilidad

- Probabilidades separables (2D)

$$p(x, y) = p_x(x)p_y(y) \quad \text{¡Sólo si son separables!}$$

- Densidad de probabilidad marginal

$$p(x) = \int p(x, y)dy$$

- Densidad de probabilidad condicional

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} \quad \text{Probabilidad de } y \text{ si se da } x$$



Integrales y Monte Carlo

- Queremos calcular: $\int_a^b f(x)dx$
- Tomamos N muestras X_i , con distribución uniforme, en el intervalo $[a,b]$.
- Estimador de Monte Carlo:

$$F_N = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$

$$E[F_N] = \int_a^b f(x)dx$$



Integrales y Monte Carlo

- Distribución no uniforme en el intervalo $[a,b]$ de \mathbb{R}^1 :

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

- Distribución uniforme en el bloque $([x_0,x_1],[y_0,y_1],[z_0,z_1])$ de \mathbb{R}^3 :

$$F_N = \frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)(z_1-z_0)}{N} \sum_{i=1}^N f(X_i)$$



Convergencia

- La varianza decrece al ritmo de $O(\sqrt{N})$

Para reducir la varianza a la mitad, hay que multiplicar el número de muestras por 4. No es muy rápido ☹

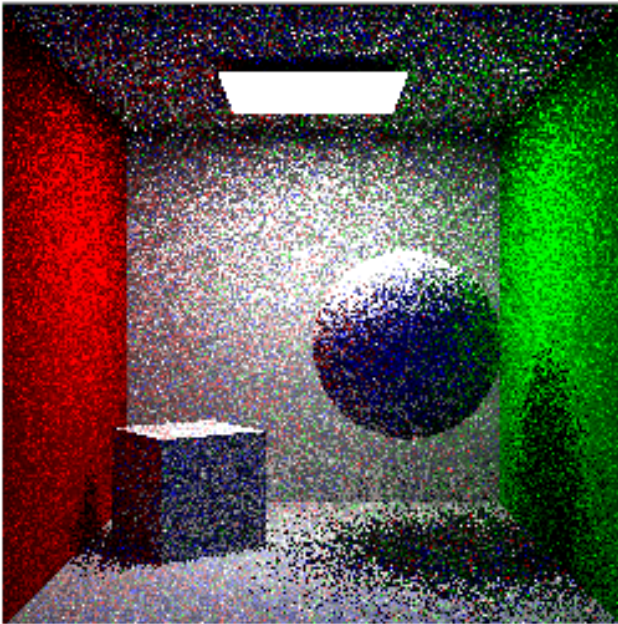
Ventaja: la convergencia depende del número de muestras, pero NO del dominio de la integral (ni dimensión, ni forma, ni discretización...)



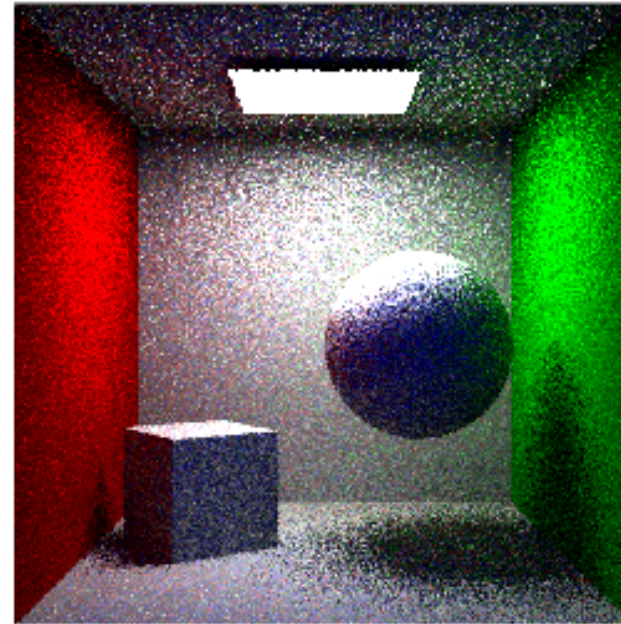
Varianza \rightarrow Ruido



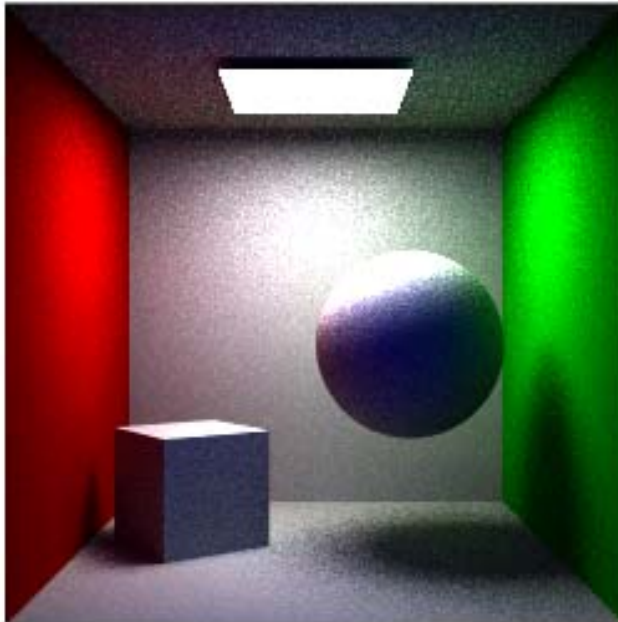
1 rayo



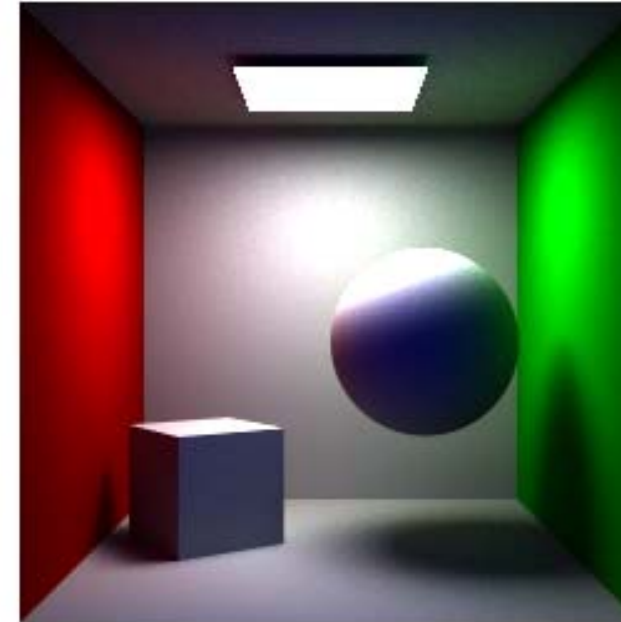
4 r.



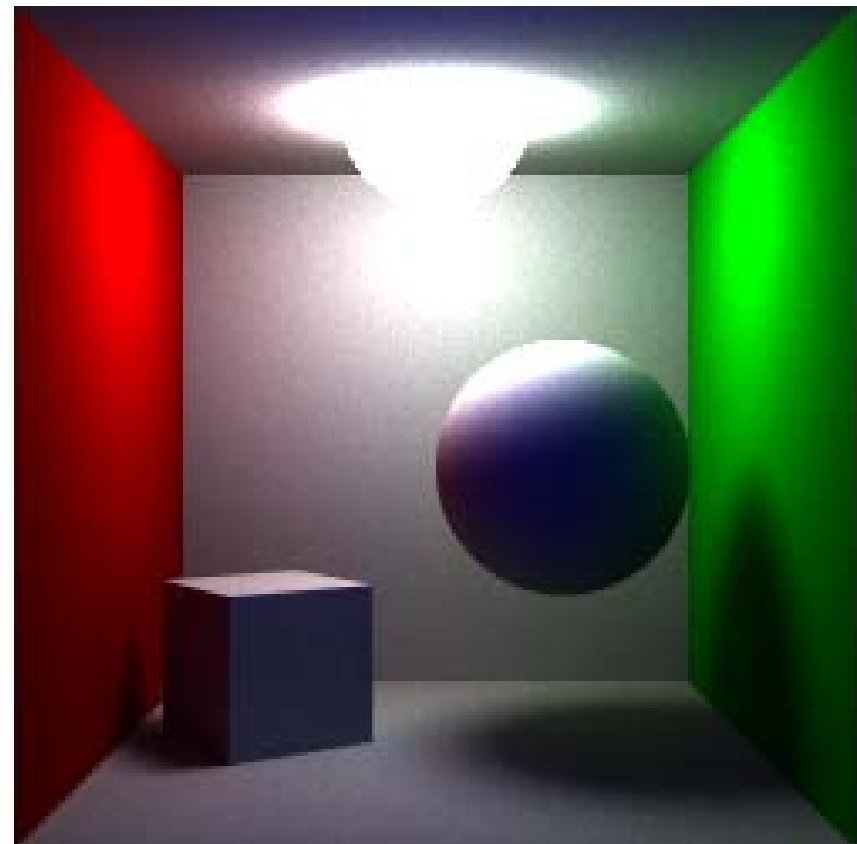
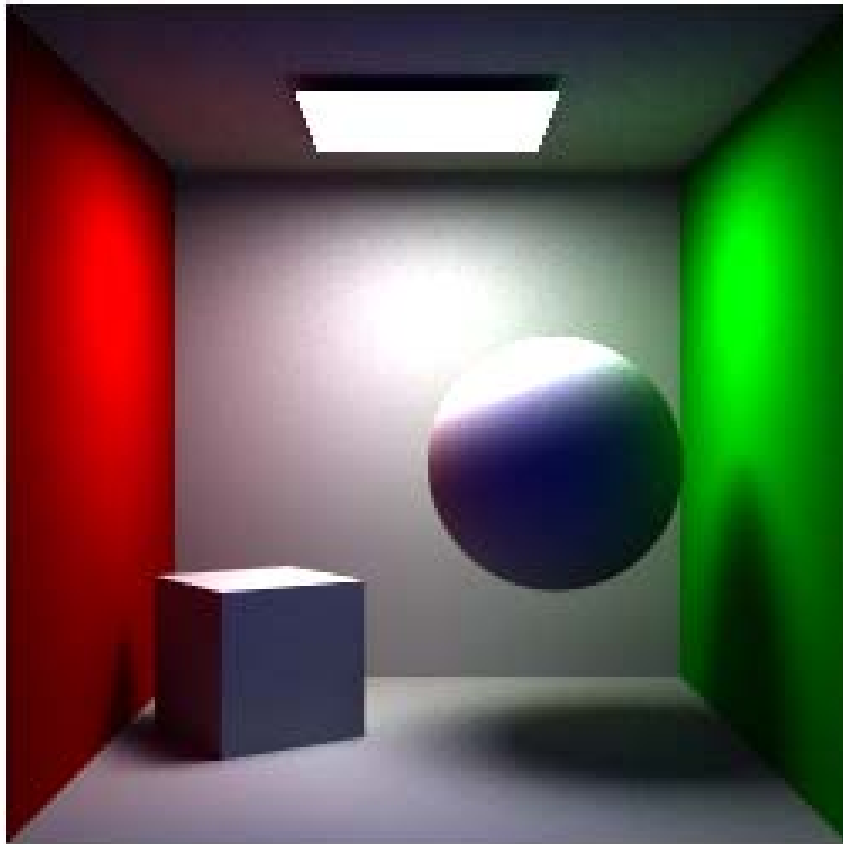
64 r.



1024 r.



Varianza \rightarrow Ruido



El producto escalar con la superficie de luz esférica tiene mayor varianza, y produce más ruido



Ejemplos de Aplicación

- Integración por pixel
- Integración en el hemisferio en la ecuación de transporte
- Integración en el volumen para simular medios participativos
- Integración en traza de caminos

**Mirar 'Monte Carlo method' en wikipedia



Problemas a Resolver

- Muestreo en dominios complejos
 - p.ej., en el hemisferio
- Reducción de la varianza → Aumento de la eficiencia
 - p.ej., empleo de distribuciones no uniformes, muestreo por importancia, etc.



Índice

- Monte Carlo básico – estadística
- Técnicas de muestreo para transformación de probabilidades
- Técnicas de muestreo para mejora de eficiencia



Integrales y Monte Carlo

- Queremos calcular: $\int_a^b f(x) dx$
- Tomamos N muestras X_i , con prob. $p(x)$, en el intervalo $[a,b]$.
- Estimador de Monte Carlo:

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

$$E[F_N] = \int_a^b f(x) dx$$



Dificultad del Problema

P: Partimos de un algoritmo que crea números aleatorios con distribución uniforme en un intervalo $[a,b]$.
¿Cómo podemos muestrear de acuerdo a una probabilidad $p(x)$ en un dominio complejo?

R: Técnicas de transformación de probabilidades.



Técnicas de Muestreo

- Parten de un algoritmo que crea números aleatorios con distribución uniforme, y mapean el resultado a otro dominio y/o distribución



Técnicas de Muestreo

- Método de inversión
- Método de rechazo
- Transformación entre distribuciones
- Quasi Monte Carlo
- Bias



Método de Inversión

- Partimos de una densidad de probabilidad deseada $p(x)$, de la cual podemos calcular la distribución $P(x)$.
- Calculamos la inversa $P^{-1}(y)$.
- Tomando una muestra aleatoria de densidad uniforme, Y_i , obtenemos $X_i = P^{-1}(Y_i)$, que tiene la probabilidad deseada.

**Ejemplos continuos y discretos en la pizarra



Método de Rechazo

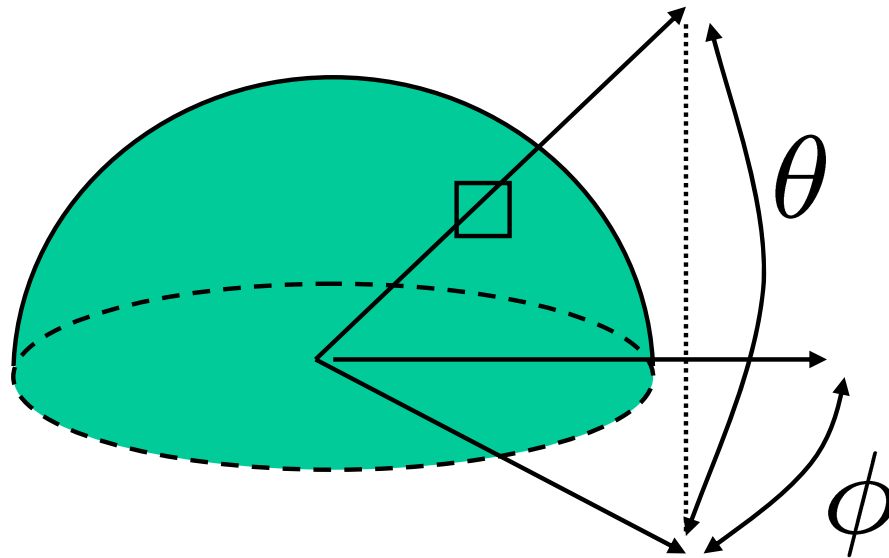
- Deseamos muestrear con probabilidad $f(x)$, pero o bien $f(x)$ no es integrable, o su integral no es invertible.
- Limitamos $f(x)$ con $c \cdot p(x)$ (lo más cerca posible), y $p(x)$ es conocida.
- Tomamos dos muestras, X de $p(x)$, e Y . Si $Y \cdot c \cdot p(X) < f(X)$, aceptamos X . Se puede hacer $Y = 1$.

**Ejemplo del círculo en la pizarra



Transformar Distribuciones

- Problema tipo: muestreo uniforme de un hemisferio (necesario para la integral de la ecuación de rendering).



Transformar Distribuciones

- Supongamos que conocemos $p_x(x)$, y la función biyectiva $y(x)$. Queremos conocer $p_y(y)$.
- Biyección implica que las distribuciones $P_x(x)$ y $P_y(y)$ son idénticas.
- Como consecuencia:

$$p_y(y) = \left| \frac{dy}{dx} \right|^{-1} p_x(x)$$



Transformar Distribuciones

- En múltiples dimensiones, con $y = T(x)$, tenemos:

$$p_y(y) = \frac{1}{|J_T(x)|} p_x(x)$$

Valor absoluto del determinante de la jacobiana de T



Transformar Distribuciones

- Hemisferio: cálculo de la densidad de probabilidad en ángulos, bajo muestreo uniforme.

Paso 1: Cálculo de densidad de probabilidad en ángulo sólido en el caso uniforme

$$p(\omega) = 1/2\pi$$

Paso 2: Aplicación de transformación de distribuciones

$$p(\theta, \phi) = \sin \theta / 2\pi$$



Transformar Distribuciones

Paso 3: Cálculo de densidad marginal y condicional

$$p(\theta) = \sin\theta \quad p(\phi|\theta) = 1/2\pi$$

Paso 4: Cálculo de distribuciones e inversión

$$P(\theta) = 1 - \cos\theta \quad P(\phi|\theta) = \phi/2\pi$$

$$\theta = \cos^{-1} \alpha \quad \phi = 2\pi\beta$$



Índice

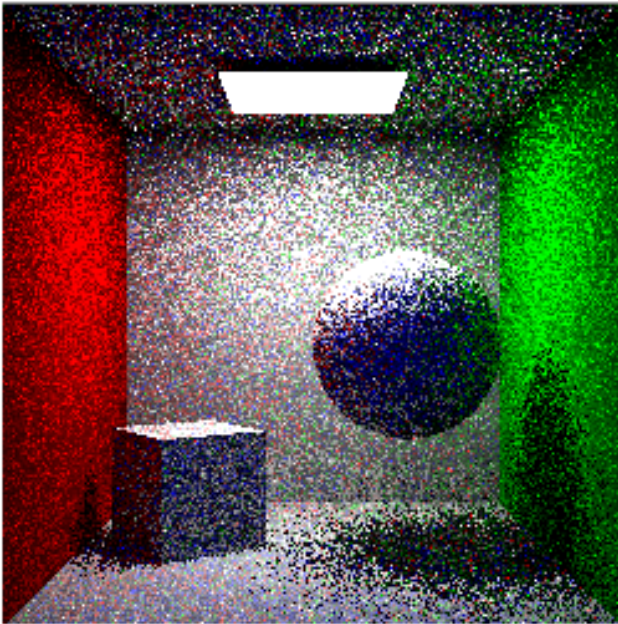
- Monte Carlo básico – estadística
- Técnicas de muestreo para transformación de probabilidades
- Técnicas de muestreo para mejora de eficiencia



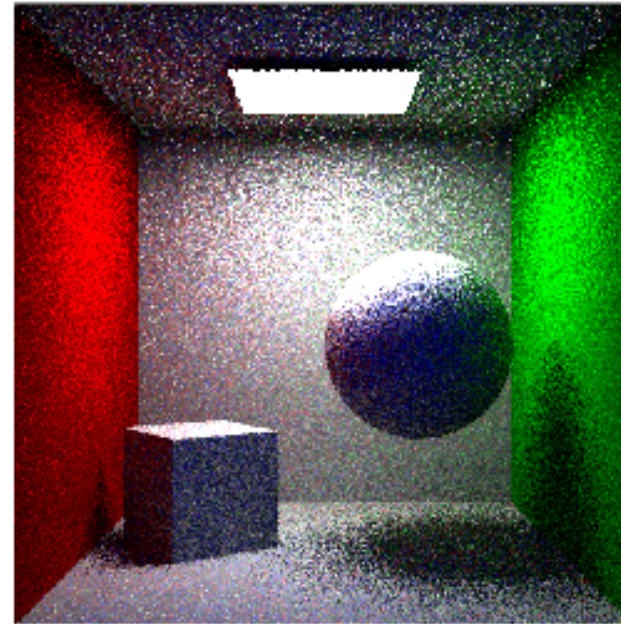
Varianza \rightarrow Ruido



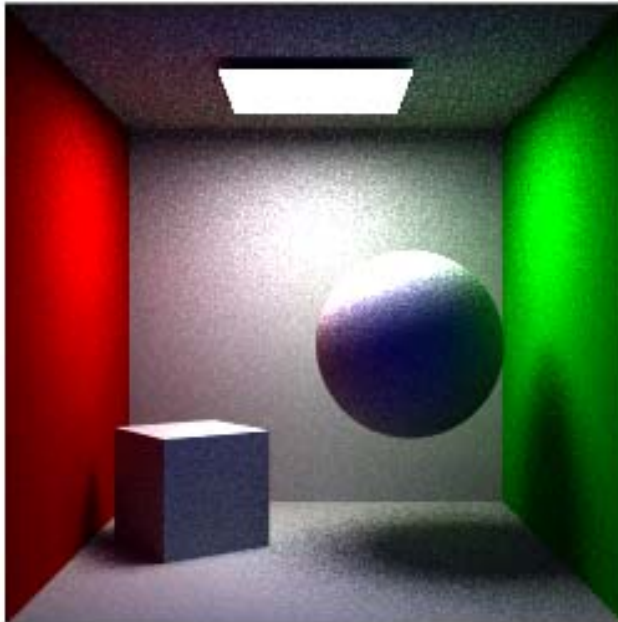
1 rayo



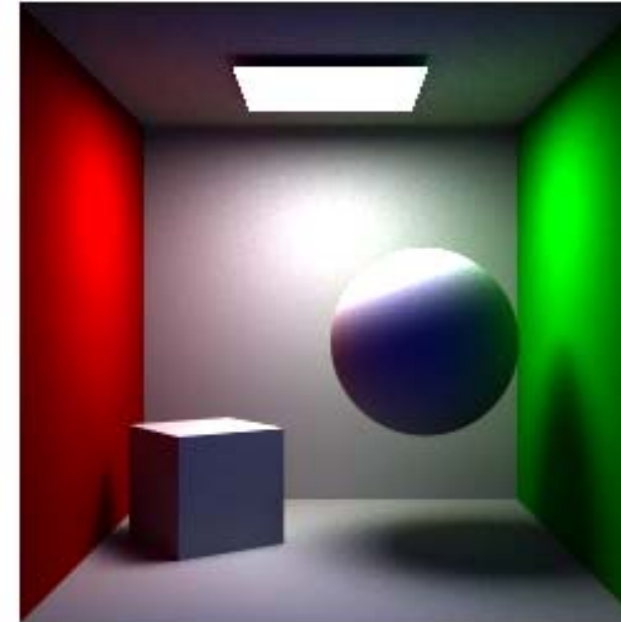
4 r.



64 r.



1024 r.



Objetivos

1. Reducir el coste computacional para un mismo número de muestras N .
2. Reducir la varianza para un mismo número de muestras N .



Técnicas de Muestreo

- Ruleta rusa
- División (splitting)
- Muestreo estratificado
- Muestreo por importancia



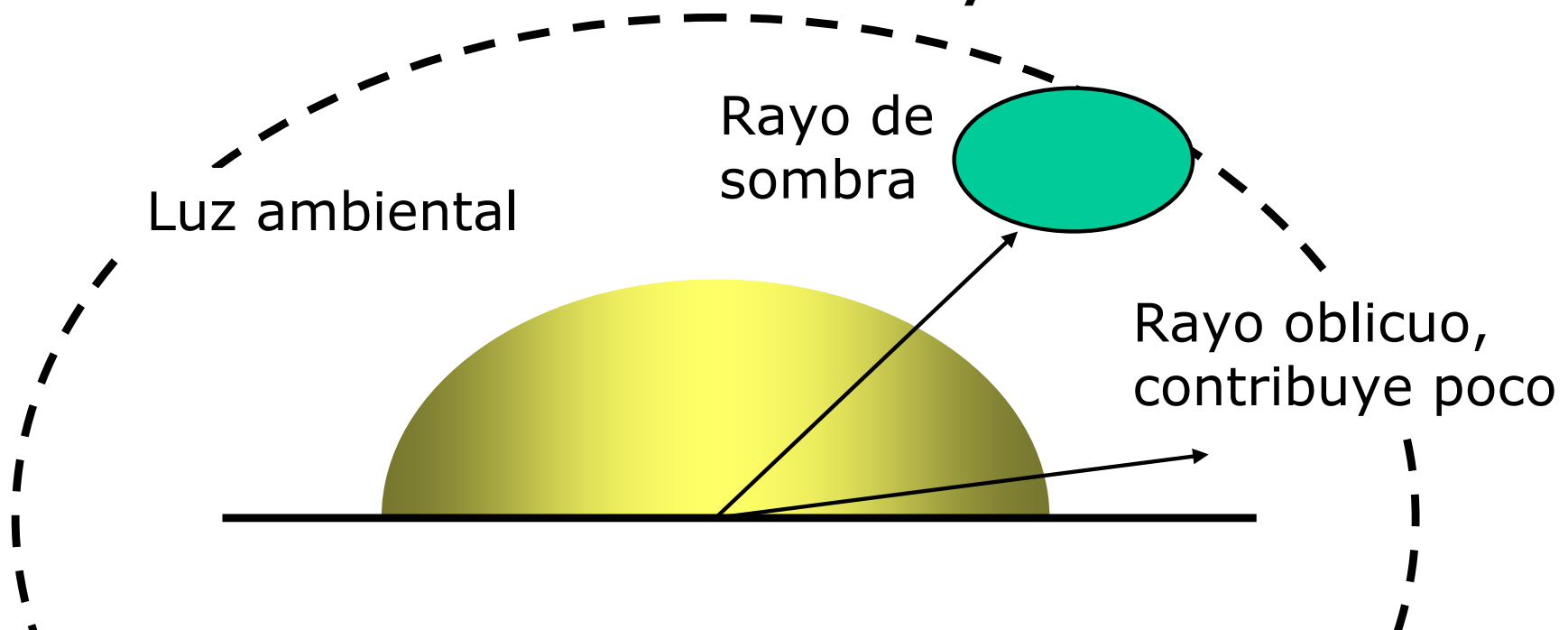
Ruleta Rusa

- En lugar de evaluar la función $f(x)$ para todas las muestras, se intentarán eliminar aquellas muestras que contribuyan poco al estimador.
- Hay que corregir el valor del estimador si se eliminan muestras



Ruleta Rusa

- Ejemplo: integral de radiancia en iluminación directa.
- Coste: traza de rayos de sombra.
- Intuición: descartar rayos oblicuos



Ruleta Rusa

1. Obtener un rayo X aleatoriamente.
2. Asignarle un valor de importancia, $0 < q < 1$, p.ej., en función del coseno o BRDF ($q = 0 \rightarrow$ max. importancia)
3. Evaluar variable aleatoria y con distribución uniforme en $[0,1]$.
4. Si $y > q$, aceptar el rayo y calcular $f(X)$; si no, descartar el rayo.



Ruleta Rusa

Si el rayo no se acepta, se utiliza un valor por defecto c (puede ser 0).

$$F'(X) = \frac{F(X) - qc}{1 - q}, \quad y > q$$

$$F'(X) = c, \quad y < q$$



División - Splitting

- Ejemplo: antialiasing integrando varios rayos por pixel.

$$\int_A \int_H L_d(x, y, \omega) dx dy d\omega$$

Integral en el
área del pixel

Integral de radiancia
reflejada (en el hemisferio
del punto visible)



División - Splitting

- Opción clásica: enviar 100 rayos por pixel, y luego el correspondiente rayo reflejado. Total: 100 muestras y 200 rayos.
- Opción por división: enviar N rayos por pixel (ej. 5), y M rayos por reflexión (ej. 20). Total: 100 muestras y 105 rayos!!



División - Splitting

- Estimador por división:

$$F_{N,M} = \frac{1}{N} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{L_d(x_i, y_i, \omega_{i,j})}{p(x_i, y_i) p(\omega_{i,j})}$$

Se puede formalizar el valor del estimador cuando se divide el muestreo.

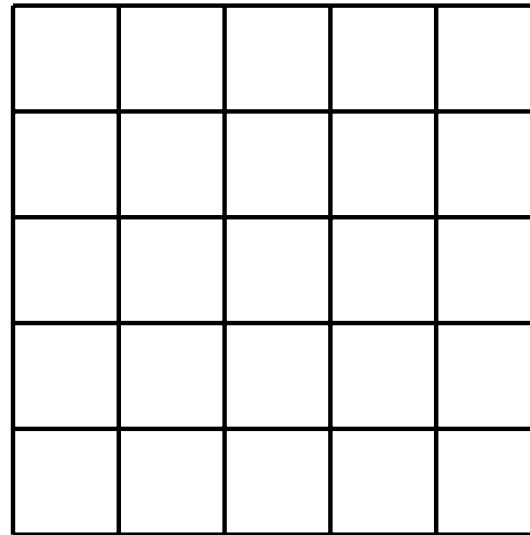


Muestreo Estratificado

- Ejemplo: antialiasing integrando varios rayos por pixel.

$$\cup D_i = D$$

$$\cap D_i = 0$$



- Se hace una partición del dominio, y se calcula un estimador por estrato



Muestreo Estratificado

- Estimador por estrato:

$$F_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{f(X_{i,j})}{p_i(X_{i,j})}$$

Muestras del estrato \rightarrow

Prob. del estrato \leftarrow

- Estimador total:

$$F = \sum_i v_i F_i$$

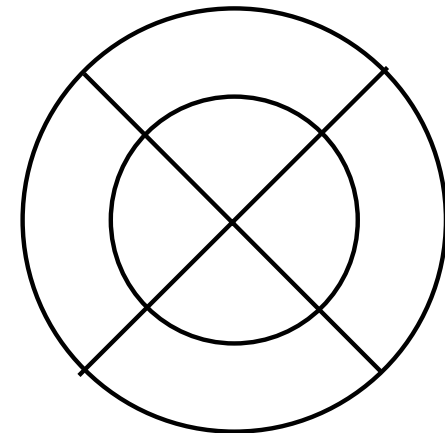
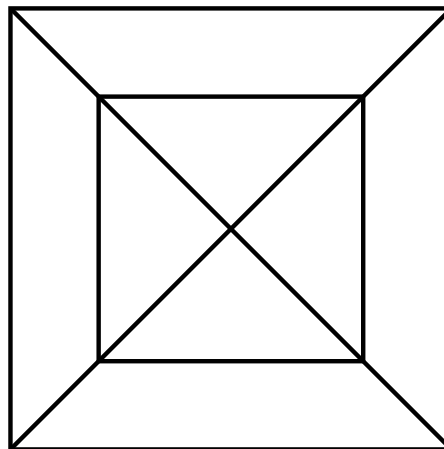
Fracción del dominio del estrato \uparrow



Muestreo Estratificado

- El muestreo estratificado es óptimo cuando la varianza en cada estrato es mínima.
- Ejemplo 2: muestreo estratificado en la integral de radiancia.
- Problema: ¿cómo obtener estratos de mínima distorsión?

Muestreo de rayos de la clase anterior (Ejemplo mejorado en la pizarra)



Muestro por Importancia

- Estimador de Monte Carlo general:

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(X_i)}{p(X_i)}$$

- Convergencia óptima si...

$$p(x) = cf(x)$$

No tiene sentido práctico, porque el cálculo de c requiere conocer la integral



Muestro por Importancia

- A menudo tenemos funciones

$$f(x) = g(x)h(x)$$

- Puede ser conveniente muestrear con probabilidad

$$p(x) = ch(x)$$



Muestro por Importancia

- Análisis de varianza:

$$F_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i)h(X_i)$$

$$F_b = \frac{1}{cN} \sum_{i=1}^N g(X_i)$$

- Podemos evaluar

$$V[F_a] - V[F_b]$$

y ver si resulta > 0 .



Muestro por Importancia

- Si tenemos varias opciones para muestrear, podemos combinar los estimadores:

$$f(x) = g(x)h(x) \quad p_g(x), p_h(x)$$

$$F_g = \sum_{i=1}^{N_g} \frac{g(X_i)h(X_i)\omega_g(X_i)}{p_g(X_i)}$$

$$F_h = \sum_{i=1}^{N_h} \frac{g(X_i)h(X_i)\omega_h(X_i)}{p_h(X_i)}$$

$$F = \frac{1}{n_f + n_g} (F_g + F_h) \quad \omega_s(x) = \frac{n_s p_s(x)}{\sum_i n_i p_i(x)}$$



Ejemplos de Aplicación

- Muestreo de BRDF
- Muestreo de luces
- Dispersión en el volumen

Siempre hay dos problemas a resolver:

- Obtener una muestra aleatoria
- Calcular su probabilidad asociada



Referencias

- Physically-based rendering
(Pharr & Humphreys)

