
Curvas y superficies de subdivisión

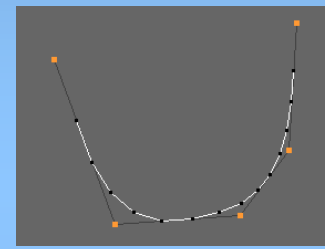
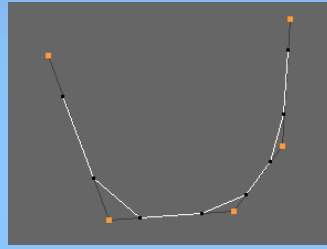
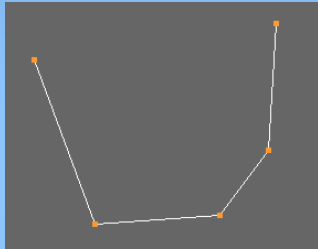
Esther García González
Depto. Matemática Aplicada

Referencias

- “Subdivision for Modeling and Animation”, SIGGRAPH 98 Course Notes.
- “Smooth subdivision Surfaces Based on Triangles”, C. T. Loop. Master thesis, University of Utah, Department of Mathematics, 1987.
- “On-line Geometric Modeling Notes”, Computer Science Department, University of California, Davis.

Curvas y superficies de subdivisión

- Curva = Límite de refinamientos sucesivos



- Superficie = Límite de refinamientos sucesivos



Empleo de subdivisión

- Utilizada en el corto de animación "Geri's Game" (Pixar), y en las películas "Bichos" y "Toy Story 2" (Pixar/Disney)

"Geri's Game" (Pixar)



<http://www.pixar.com/shorts/gg/index.html>

"Bichos" (Pixar/Disney)



<http://www.pixar.com/featurefilms/abl/>



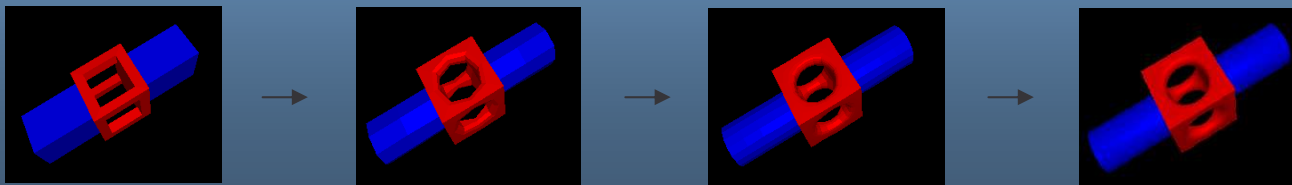
<http://www.pixar.com/featurefilms/ts2/>



"Toy Story 2" (Pixar/Disney)

Ventajas de la subdivisión

- Permiten dibujar curvas y superficies complejas
- Permiten obtener distintos niveles de detalle
- Son numéricamente estables
- Mantienen su regularidad en animaciones
- Sencillas de implementar
- Se ejecutan (renderizan) directamente



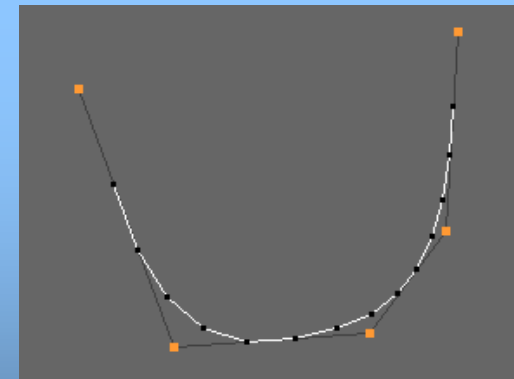
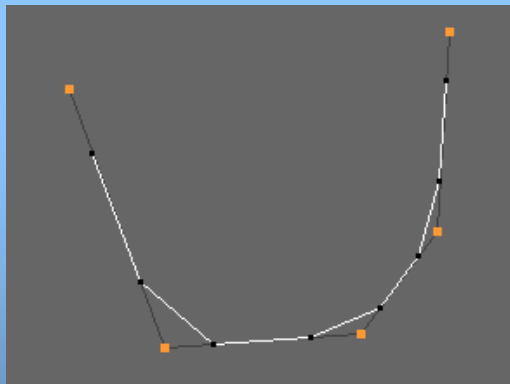
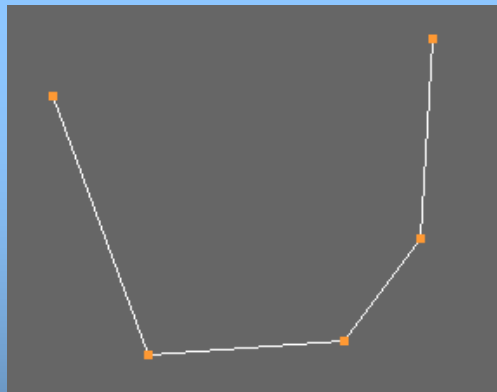
Subdivisión de Curvas

- La subdivisión de superficies tiene su origen en la subdivisión de curvas.

Ejemplo básico en curvas

Subdivisión en un segmento: algoritmo de Chaikin

<http://www.multires.caltech.edu/teaching/demos/java/chaikin.htm>



Copyright © 1997 Peter Schröder

Idea: "recortar las esquinas"

Tras varias iteraciones, se va pareciendo a una curva suave.

Subdivisión basada en B-splines

- puntos de control

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \vdots \\ p_{-2} \\ p_{-1} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

nodos equiespaciados

- ecuación del B-spline

$$P(t) = \vec{N}(t) \vec{p}$$

- ecuación del refinamiento

$$\vec{N}(t) = \vec{N}(2t) S$$

- B-spline refinado

$$P(t) = \vec{N}(2t) S \vec{p}$$

Si llamamos \vec{p}^j a los puntos de control y \vec{p}^{j+1} los puntos de control obtenidos al refinar el B-spline, se relacionan por:

$$\vec{p}^{j+1} = S \vec{p}^j$$

El proceso de subdivisión

- La subdivisión consiste en dibujar las sucesivas poligonales de control obtenidas por refinamiento, en vez de dibujar el B-spline al que convergen.
- Conocida la matriz S del esquema de subdivisión, en cada iteración los nuevos puntos se calculan multiplicando S por los puntos anteriores. Si partimos de unos puntos de control iniciales \vec{p} ,

$$\vec{p}^0 := \vec{p}$$

recursivamente

$$\vec{p}^{j+1} = S \vec{p}^j$$

Ejemplo: caso lineal

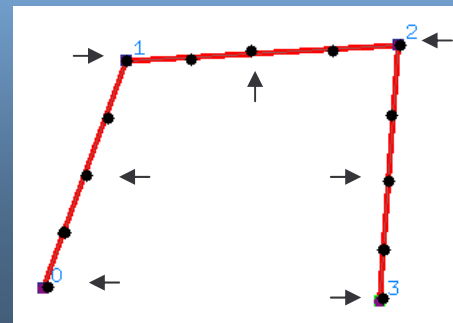
Ejemplo: B-splines de orden 1

$$\vec{p}^{j+1} = S \vec{p}^j$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 2 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 2 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

La construcción de los puntos de p^{j+1} no es siempre igual:

- puntos pares: coeficientes 1/2 (1,1)
- puntos impares: coeficiente 1



Ejemplo: caso cuadrático

Ejemplo: B-splines de orden 2

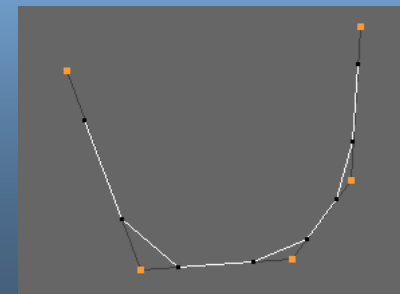
$$\vec{p}^{j+1} = S \vec{p}^j$$

$$S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 3 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 3 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 3 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 3 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 3 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

La construcción de los puntos de p^{j+1} no es siempre igual:

- puntos pares: coeficientes 1/4 (3,1)
- puntos impares: coeficiente 1/4 (1,3)

algoritmo de Chaikin



Ejemplo: caso cúbico

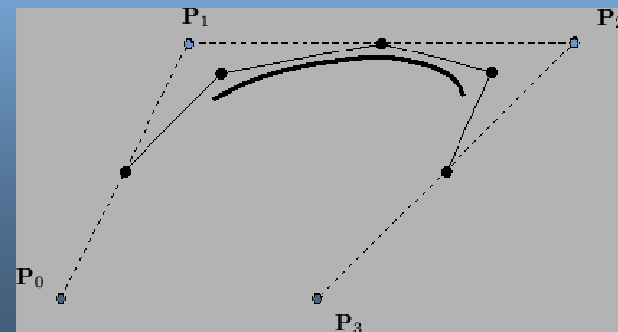
Ejemplo: B-splines de orden 3

$$\mathbf{S} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 6 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 4 & \mathbf{4} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & \mathbf{6} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \mathbf{4} & 4 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \mathbf{1} & 6 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 4 & 4 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 6 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \ddots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}^{j+1} = \mathbf{S} \vec{p}^j$$

La construcción de los puntos de \vec{p}^{j+1} no es siempre igual:

- puntos pares: coeficientes $1/8 (1, 6, 1)$
- puntos impares: coeficientes $1/8 (4, 4)$



Aproximación. Interpolación.

Dependiendo de S , ocurren dos situaciones al calcular los puntos p^{j+1} a partir de los p^j :

- Los puntos pares de \vec{p}^{j+1} coinciden con puntos de \vec{p}^j . En este caso, esto va a suceder en todas las iteraciones del esquema de subdivisión. Se dice que el esquema es un esquema de interpolación.
- Los puntos de \vec{p}^{j+1} son todos diferentes de los de \vec{p}^j . El esquema es un esquema de aproximación.

Ejemplos:

- S basado en B-splines de orden 1: interpolación
- S basado en B-splines de orden 2 ó 3: aproximación

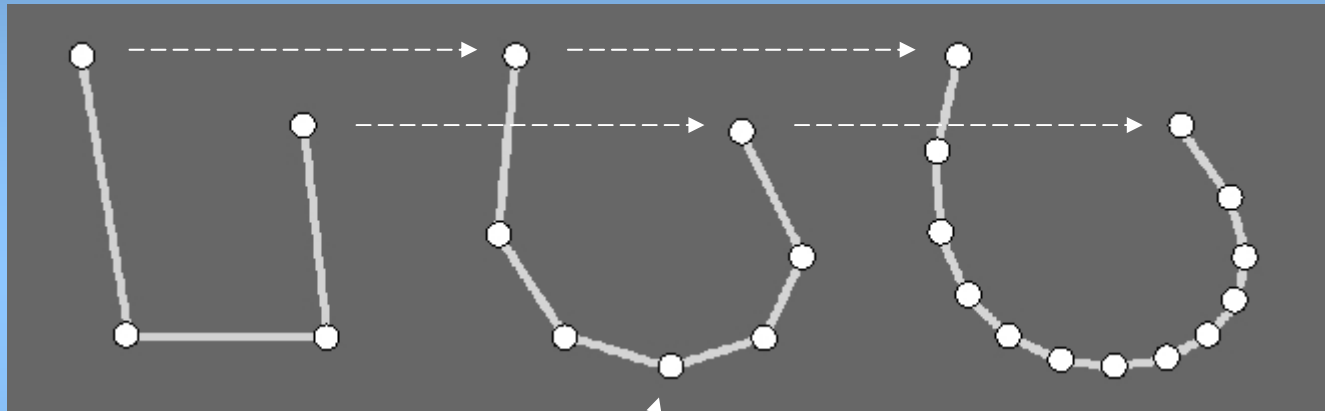
Esquemas de subdivisión

- En la práctica, además de las matrices de subdivisión obtenidas subdividiendo B-splines, se pueden elegir otras matrices de subdivisión y construir los nuevos puntos multiplicando en cada paso por la matriz S .

Ejemplos:

- Esquemas que proceden de B-splines
- Otros esquemas (por ej., esquema de 4 puntos)

Ejemplo: esquema de 4 puntos



Interpolación: los puntos originales se mantienen, y aparecen nuevos puntos siguiendo la regla siguiente

$$p_{2i+i}^{j+1} = 1/16 \left(-p_{i-1}^j + 9p_i^j + 9p_{i+1}^j - p_{i+2}^j \right)$$

Ejemplo: esquema de 4 puntos

- Es un esquema de subdivisión que no procede de B-splines.
- Su matriz S viene dada por:

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

- Es un esquema de interpolación

Subdivisión de superficies

Superficies de subdivisión

- Surgen en los trabajos de Catmull-Clark y Doo-Sabin en 1978: generalizan el modelado con parches spline a superficies arbitrarias.
- Las ideas básicas provienen de trabajos de G. de Rham a principios de los años 50: "corner cutting" para describir curvas suaves.
- Primer uso en animación "Geri's Game" 1998 (ganadora de un óscar).
- La subdivisión de superficies tiene su origen en la subdivisión de curvas.

Subdivisión de superficies

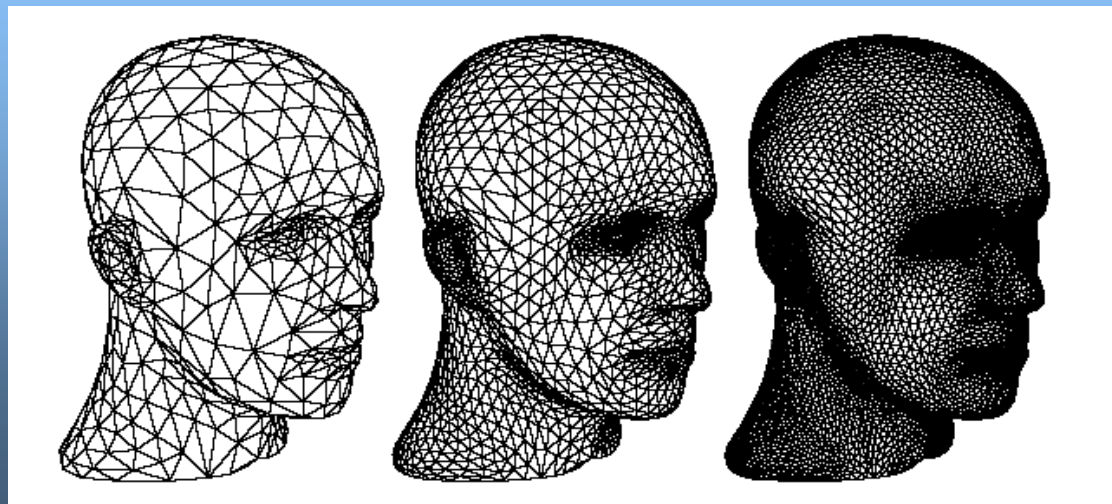
- La idea de subdividir superficies es similar a la de la subdivisión de curvas: considerar un esquema de refinamiento y aplicarlo de modo reiterado sobre unos puntos de partida (**mesh**). Los pasos intermedios son **aproximaciones** de la superficie final.
- Pedimos esquemas locales de refinamiento para tratar de modo diferente distintos puntos de la superficie.
- Habrá vértices extraordinarios (esquinas) en los que el esquema de refinamiento sea diferente y sólo se consiga una regularidad menor que en el resto de los puntos.

Superficies de subdivisión

Esquemas: Existen distintos esquemas de refinamiento:

Catmull-Clark, Kobbelt, Loop, Butterfly, Doo-Sabin y Midedge

(algunos proceden de la subdivisión de superficies B-spline de producto tensorial)



Esquemas de refinamiento

- Doo-Sabin: es una generalización de la subdivisión en B-splines bi-cuadráticos (cuadráticos en las dos direcciones u y v) uniformes.
- Catmull-Clark: es una generalización de la subdivisión en B-splines bi-cúbicos (cúbicos en las dos direcciones u y v) uniformes.
- Loop: generalización de la subdivisión de splines cuadráticos sobre parches triangulares.
- Butterfly, Butterfly generalizado, Midedge, Kobbelt...

Esquemas de refinamiento

- Los coeficientes de refinamiento se calculan usando en la mayoría de los casos subdivisión de curvas, y se reinterpretan los resultados geoméricamente.
- Llamamos máscaras a los coeficientes que indican cómo se construyen los nuevos puntos a partir de los anteriores.
- La suma de los coeficientes da 1 (es una comb. convexa).
- Se dibujan de modo que se observe qué coeficientes acompañan a cada punto.

Ejemplos:

9	-3	3	-9	4	-24	-4	16	-16
3	-1	1	-3	4	-24	-4	16	-16

Doo-Sabin (1978)

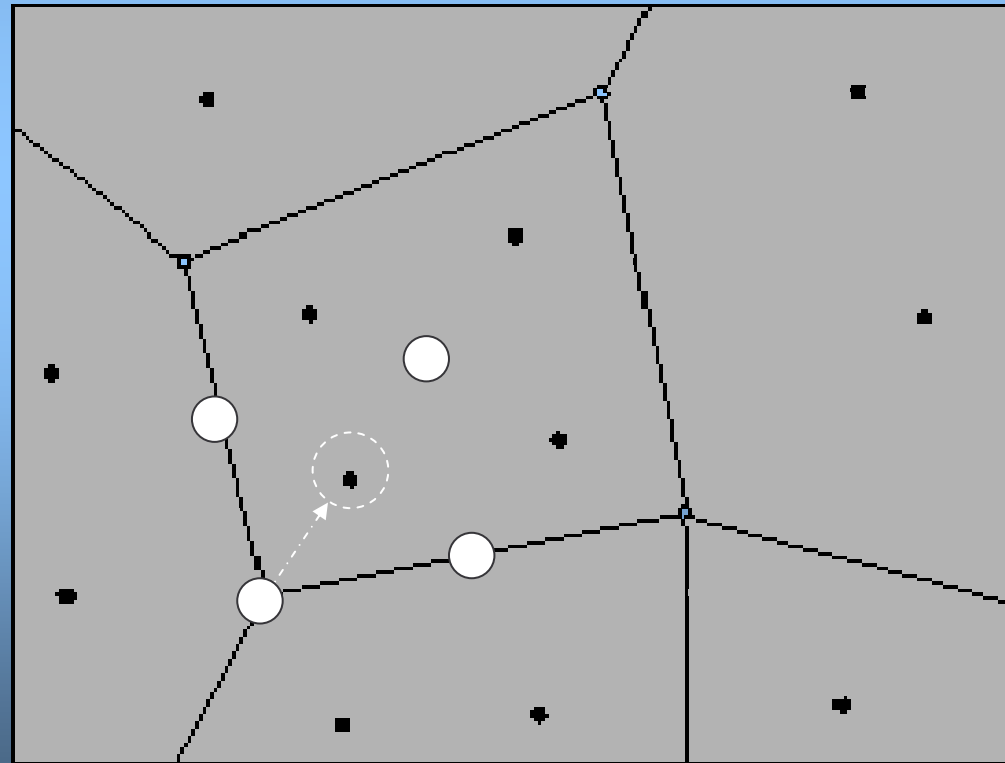
Superficie B-spline de producto tensorial con funciones de base de grado 2 en u y en v (Chaikin para superficies).

Usando la ecuación del refinamiento en cada función de base, se obtienen las siguientes máscaras para puntos **con cuatro aristas incidentes**:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{9} - \mathbf{3} & \mathbf{3} - \mathbf{9} & \mathbf{9} - \mathbf{3} & \mathbf{3} - \mathbf{9} \\ | \quad | & | \quad | & | \quad | & | \quad | \\ \mathbf{3} - \mathbf{1} & \mathbf{1} - \mathbf{3} & \mathbf{3} - \mathbf{1} & \mathbf{1} - \mathbf{3} \end{array}$$

Geométricamente: cada punto origina un punto por cada cara de la que es vértice, hallado como la media del centroide de la cara, los puntos medios de las dos aristas de la cara que llegan al punto, y el propio punto.

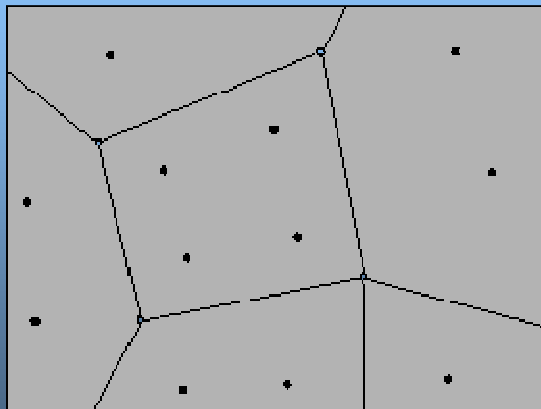
Geoméricamente: cada punto origina un punto por cada cara de la que es vértice, hallado como la media del centroide de la cara, los puntos medios de las dos aristas de la cara que llegan al punto, y el propio punto.



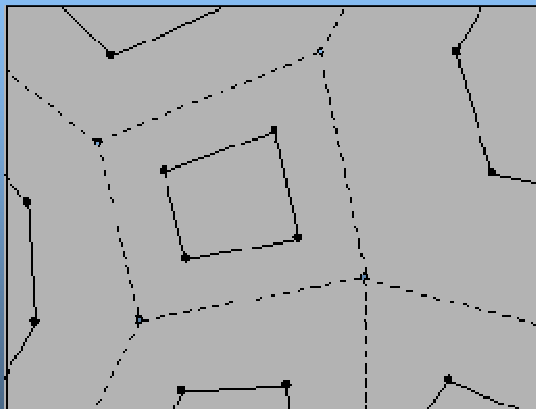
Doo-Sabin

1. Hallamos los nuevos puntos
2. Unimos los nuevos puntos en cada cara
3. Unimos los nuevos puntos adyacentes a una antigua arista

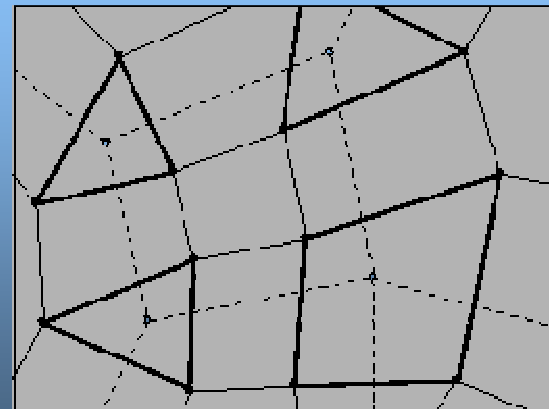
1.



2.



3.



Doo-Sabin

La interpretación geométrica permite generalizar la creación de puntos con n aristas incidentes, $n \geq 3$.

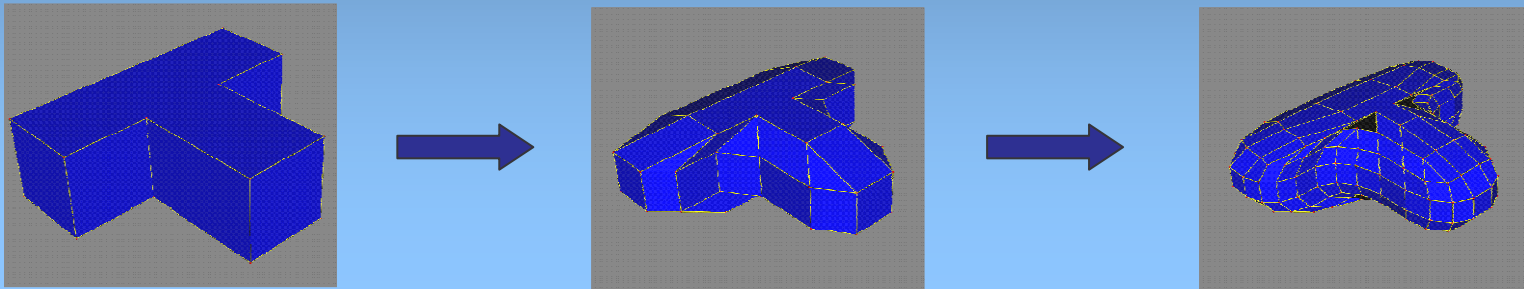
El proceso se repite de modo iterativo hasta obtener superficies suaves C^1 , salvo en los vértices extraordinarios, donde sólo se alcanza G^1 .

Propiedades:

- control local
- envolvente convexa

Doo-Sabin

Ej:



All contents copyright (c) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000
Computer Science Department, University of California, Davis
All rights reserved.

Ej:



Catmull-Clark (1978)

Superficie B-spline con funciones de base de grado 3 en u y en v.

Usando la ecuación del refinamiento en cada función de base, se obtienen las siguientes máscaras para puntos de control con 4 aristas incidentes:

$$\begin{array}{ccc} 1 & - & 6 & - & 1 \\ | & & | & & | \\ 6 & - & 36 & - & 6 \\ | & & | & & | \\ 1 & - & 6 & - & 1 \end{array}$$

A

$$\begin{array}{ccc} 4 & - & 4 \\ | & & | \\ 24 & - & 24 \\ | & & | \\ 4 & - & 4 \end{array}$$

B

$$\begin{array}{ccc} 4 & - & 24 & - & 4 \\ | & & | & & | \\ 4 & - & 24 & - & 4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 16 & - & 16 \\ | & & | \\ 16 & - & 16 \end{array}$$

C

Geoméricamente:

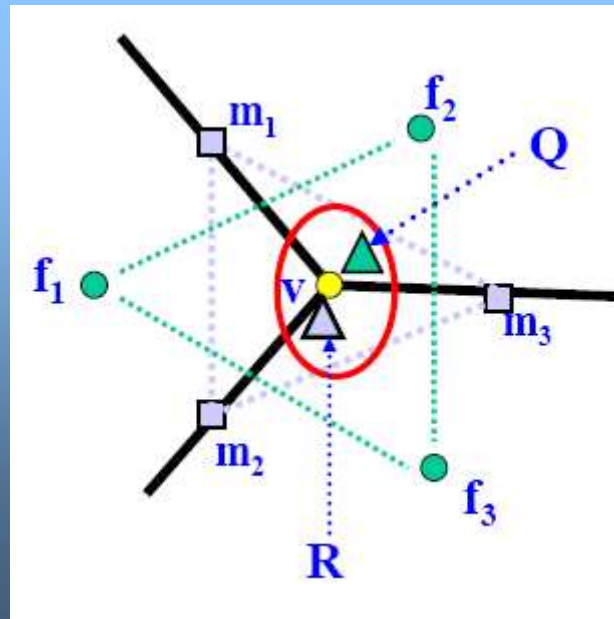
A) para cada vértice v : considerar las caras que llegan a v , hallar sus centroides f_i y llamar Q a su punto medio; considerar las aristas que llegan a v , hallar los puntos medios de esas aristas m_i y llamar R a su media; calcular el nuevo punto como

$n=n^{\circ}$ aristas incidentes a v

$$\frac{1}{n} (Q + 2 R + (n-3) v)$$

1	—	6	—	1
6	—	36	—	6
1	—	6	—	1

A

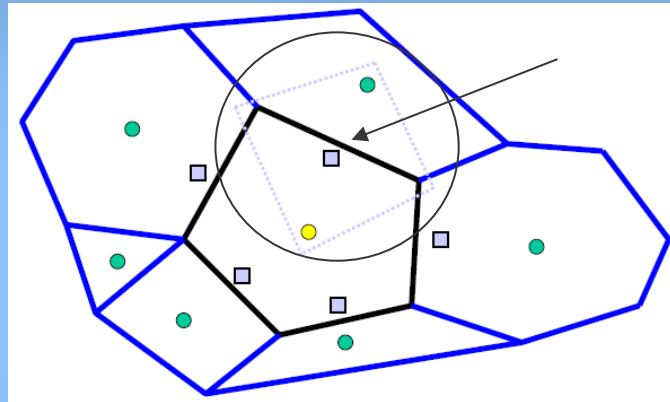


Geoméricamente:

B) para cada arista: tomar la media de los centroides de las dos caras adyacentes junto con los puntos extremos de la arista.

B

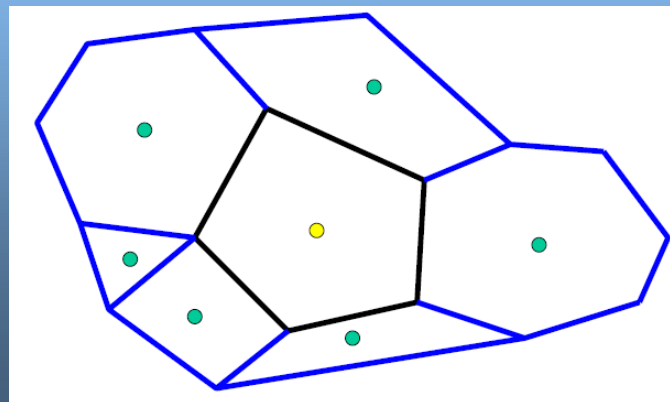
$$\begin{array}{c} 4 - 24 - 4 \\ | \quad | \quad | \\ 4 - 24 - 4 \end{array}$$



C) para cada cara: tomar el centroide de la cara.

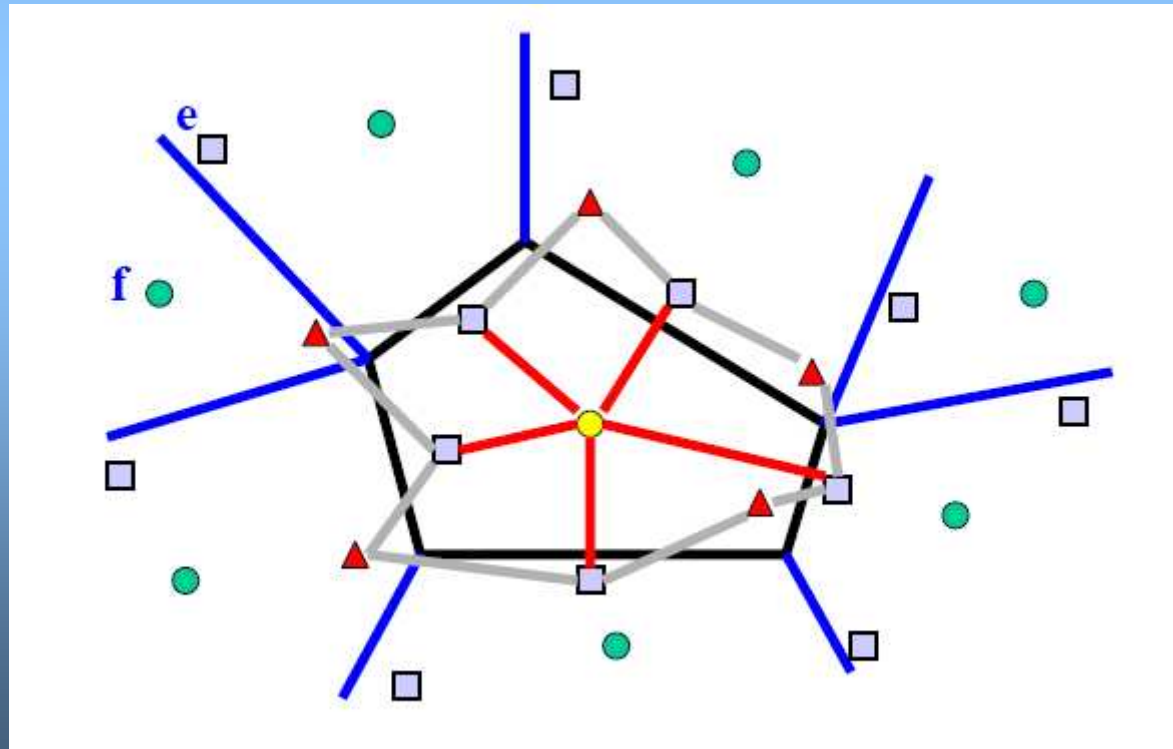
C

$$\begin{array}{c} 16 - 16 \\ | \quad | \\ 16 - 16 \end{array}$$



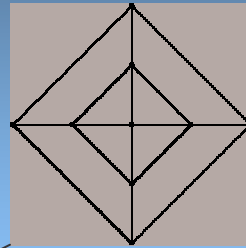
Geoméricamente:

Para cada cara, unir el nuevo punto C a cada punto tipo B de las aristas de la cara, y conectar los nuevos puntos tipo A a los dos puntos tipo B de aristas incidentes al antiguo vértice.

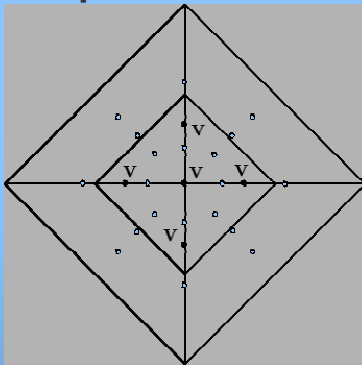


Catmull-Clark

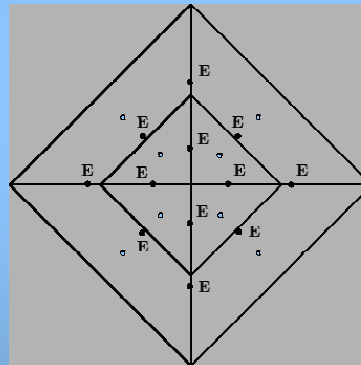
figura original:



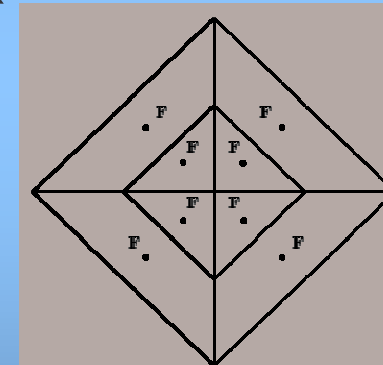
nuevos puntos:



tipo A

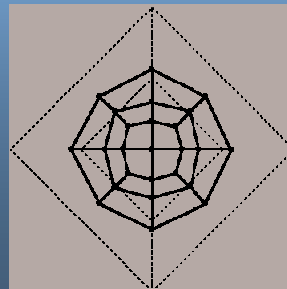


tipo B



tipo C

subdivisión de
Catmull-Clark:



All contents copyright (c) 1996, 1997, 1998, 1999, 2000
Computer Science Department, University of California, Davis
All rights reserved.

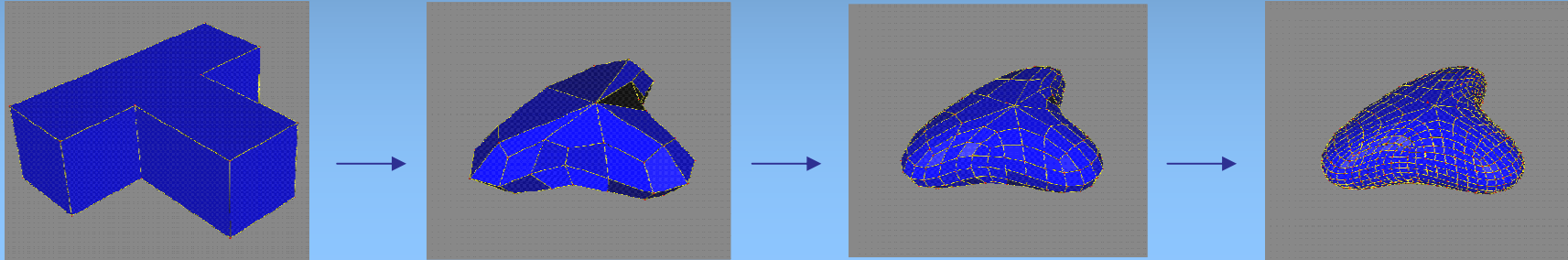
Catmull-Clark

Propiedades:

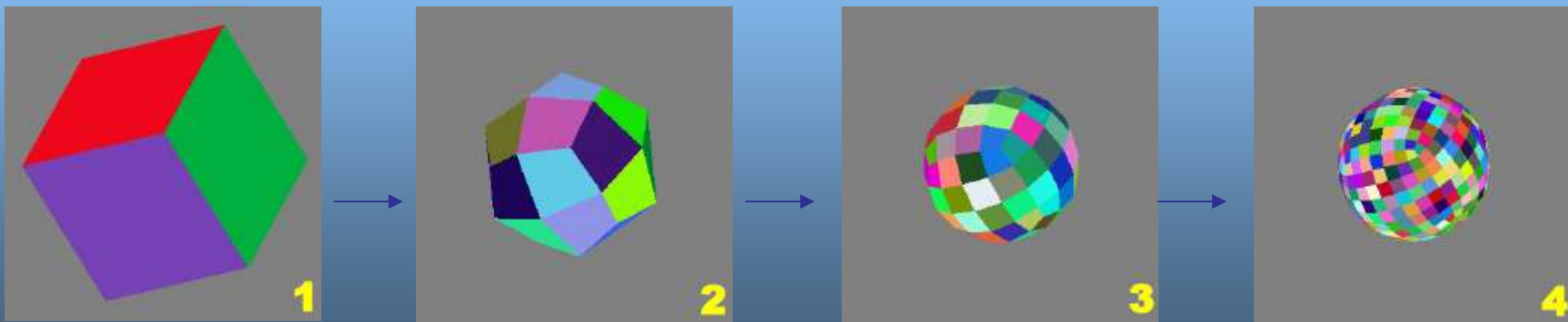
- después de la primera ejecución, todas las caras pasan a tener 4 aristas
- se consigue regularidad C^2 excepto en vértices extraordinarios. A las aristas se les asigna distinto grado de “sharpness” (distintos esquemas)
- propiedad de envolvente convexa
- control local

Catmull-Clark

Ej:



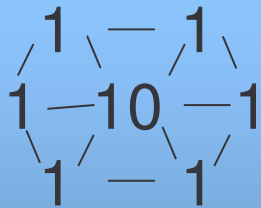
Ej:



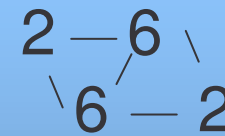
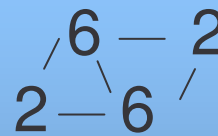
Loop (1987)

Se basa en el refinamiento de superficies spline triangulares.

Las máscaras para la creación de puntos, suponiendo que cada punto tiene 6 aristas incidentes, son:



A



B

Se pueden generalizar si el número de aristas incidentes varía.

Loop

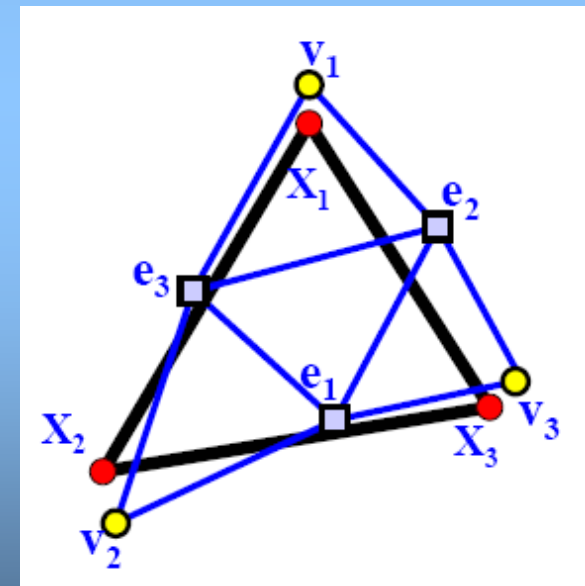
Geoméricamente:

A) para cada vértice X_i : sea Q_i la media de los puntos que comparten una arista con X_i . Hallamos el nuevo punto con la fórmula:

$$\frac{5}{8} X_i + \frac{3}{8} Q_i$$

(los coef. varían si cambia el nº de aristas incidentes)

B) para cada arista: hallar la media de los centroides de las dos caras adyacentes junto con el punto medio de la arista.



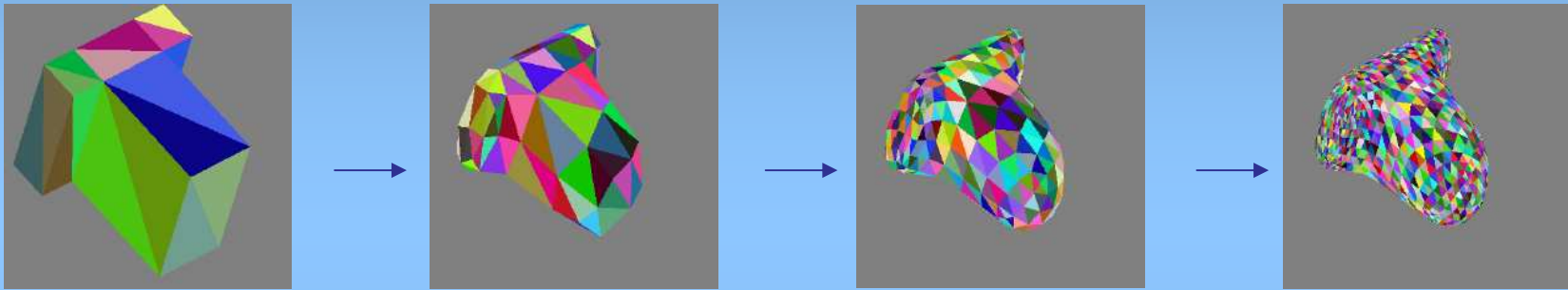
Loop

Propiedades:

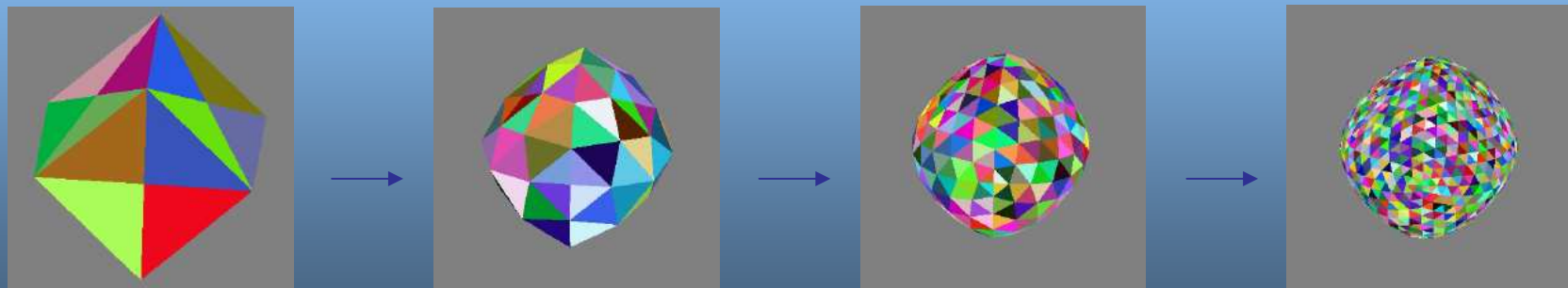
- Envolverte convexa
- Control local
- Regularidad C^2 en casi todos los puntos.
En los vértices extraordinarios alcanza G^1 .

Loop

Ej:



Ej:

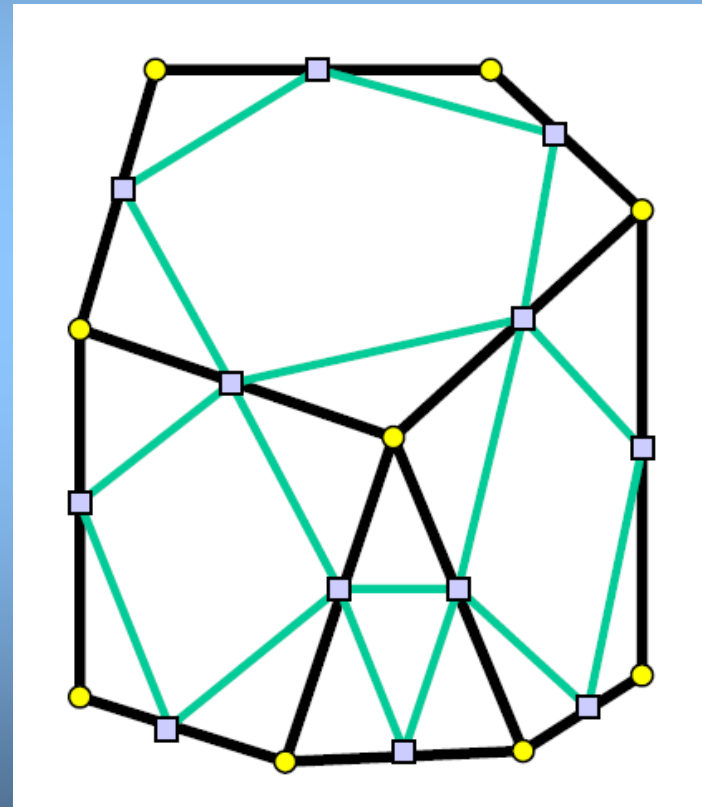


Peters-Reif (1998)

Geoméricamente:

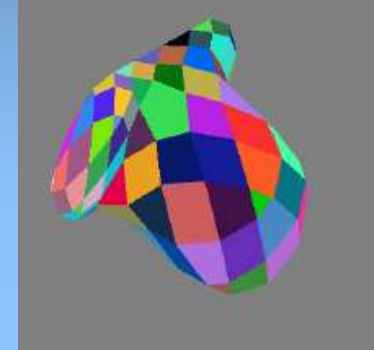
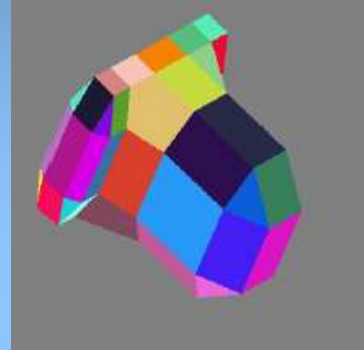
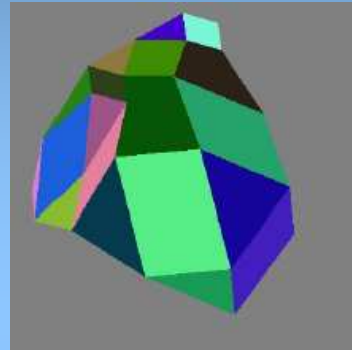
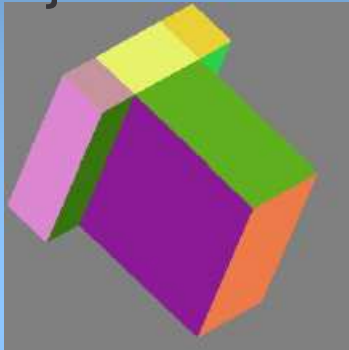
Dibujar el punto medio de cada arista, y por sustituir cada antigua cara por las caras obtenidas uniendo estos nuevos puntos.

La superficie unida al repetir este proceso tiene regularidad G^1 .

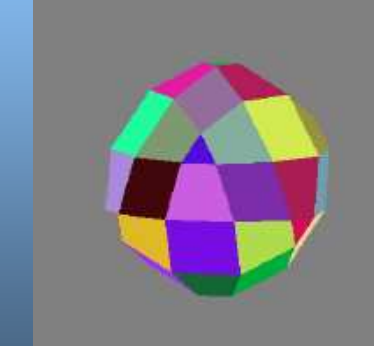
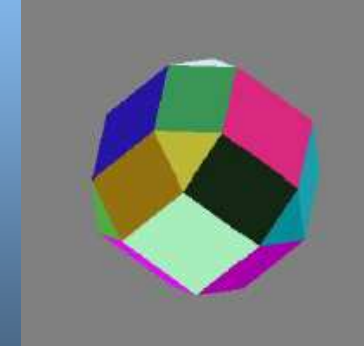
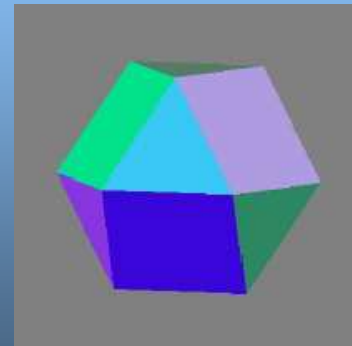


Peters-Reif

Ej:



Ej:



Esquemas de refinamiento

- Los esquemas de Loop, Doo-Sabin y Catmull-Clark que se utilizan en la actualidad son generalizaciones de los que hemos descrito hasta el momento. Además, se especifican esquemas especiales para los vértices extraordinarios que mejoran la regularidad en dichos puntos.
- Los esquemas de Kobbelt, Butterfly y Butterfly generalizado, y Midedge se definen de modo similar a los anteriores, especificando qué máscaras siguen para vértices regulares y para vértices extraordinarios.