

# Curvas de Bezier a trozos

---

- Para modelar curvas complejas con curvas de Bezier, se necesitan grados muy altos.
- Como alternativa, se construyen curvas de Bezier a trozos (de menor grado) y se *unen* conservando la regularidad.
- En CAGD suele ser suficiente que las curvas sean  $C^1$  o  $C^2$ -continuas.

- la continuidad  $C^0$  produce "picos" que no son deseables.
- la continuidad  $C^1$  o  $G^1$  funciona bien para curvas 2D.
- para curvas en 3D se suele pedir que la curva sea  $C^2$ -continua o  $G^2$ -continua.

# Parámetros globales y locales

Notaciones:

- El parámetro  $u$  recorrerá el intervalo  $[u_0, u_L]$ . Se llama parámetro global
- Tendremos una colección de nodos  $u_i < u_{i+1}$ ,  $i=0 \dots (L-1)$
- El vector  $[u_0, u_1, \dots, u_L]$  se llama vector de nodos
- En cada intervalo  $[u_i, u_{i+1}]$  la curva será una curva de Bezier (en general, parametrizada en  $[0, 1]$  mediante un parámetro local  $t$ )

parámetro local:

$$t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} = \frac{u - u_i}{\Delta_i}$$

$$t \in [0, 1] \\ u \in [u_i, u_{i+1}]$$

# Parámetros globales y locales

- Denotaremos la curva global por  $s(u)$ .
- Cada trozo de  $s$  en  $[u_i, u_{i+1}]$ , cuando usemos el parámetro local, se denotará  $s_i(t)$ :

$$\text{si } u \in [u_i, u_{i+1}], \text{ entonces } s(u) = s_i(t) \text{ para } t = \frac{u - u_i}{\Delta_i}$$

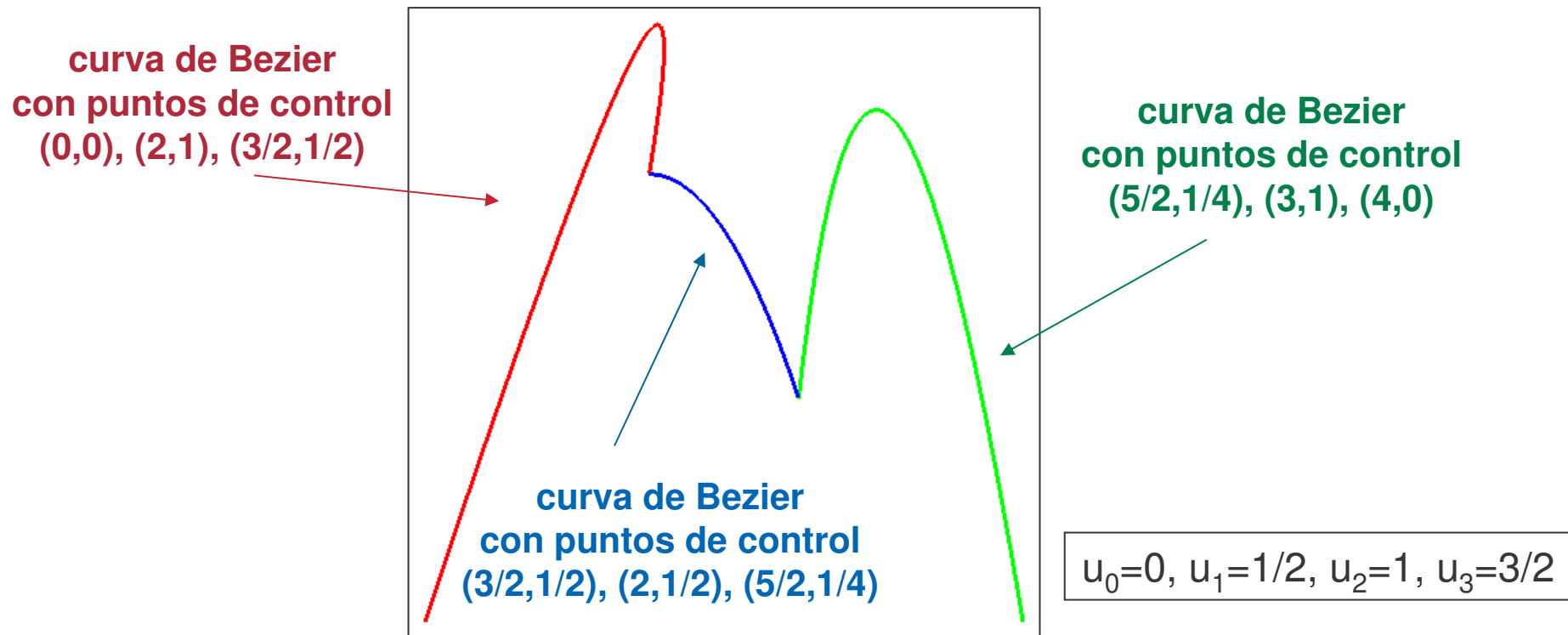
Ventaja de esta notación al derivar:

derivada de una  
curva de Bezier

$$\frac{d s(u)}{d u} = \frac{d s_i(t)}{d t} \frac{d t}{d u} = \frac{1}{\Delta_i} \overbrace{\frac{d s_i(t)}{d t}}$$

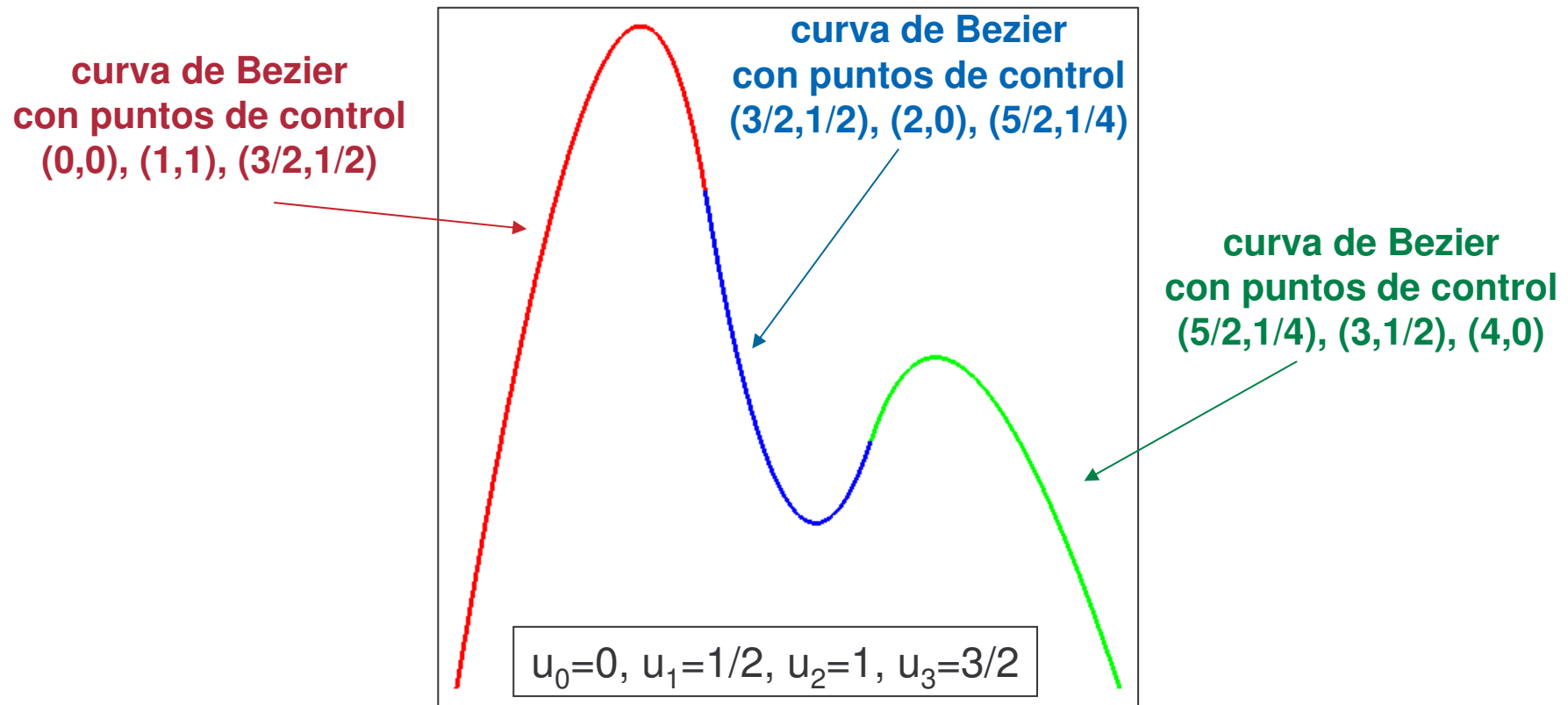
# Continuidad

- Para conseguir que la curva  $s(u)$  sea *únicamente continua* basta imponer que el punto final del polígono de control de cada  $s_i$  coincida con el primer punto de control de  $s_{i+1}$ .



# Ejemplo

¿Cómo conseguimos que las uniones sean suaves?



# Continuidad C<sup>1</sup>

• Si queremos que la unión sea C<sup>1</sup>-continua habrá que pedir que las derivadas por la izquierda y por la derecha de  $s(u)$  en cada  $u_i$  coincidan. Veámoslo para el punto  $u_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds(u)}{du} \Big|_{u=(u_1)^-} = \frac{ds_0(t)}{dt} \frac{dt}{du} \Big|_{t=1} = \frac{1}{\Delta_0} \frac{ds_0(t)}{dt} \Big|_{t=1} = \frac{1}{\Delta_0} \underbrace{n(b_n - b_{n-1})}_{\Delta \mathbf{b}_{n-1}} \\ \frac{ds(u)}{du} \Big|_{u=(u_1)^+} = \frac{ds_1(t)}{dt} \frac{dt}{du} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\Delta_1} \frac{ds_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\Delta_1} \underbrace{n(b_{n+1} - b_n)}_{\Delta \mathbf{b}_n} \end{array} \right.$$

de donde

$$\boxed{\frac{\Delta \mathbf{b}_n}{\Delta \mathbf{b}_{n-1}} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}}$$

- los puntos  $b_{n-1}$ ,  $b_n$  y  $b_{n+1}$  están alineados
- los vectores  $\Delta \mathbf{b}_{n-1}$  y  $\Delta \mathbf{b}_n$  guardan la proporción anterior.

# Continuidad $G^1$

- Si queremos que la unión sea  $G^1$ -continua habrá que pedir que las derivadas por la izquierda y por la derecha de  $s(u)$  en cada  $u_i$  sean proporcionales (y tengan el mismo sentido).

$$\frac{1}{\Delta_0} n(b_n - b_{n-1}) = \lambda \frac{1}{\Delta_1} n(b_{n+1} - b_n)$$

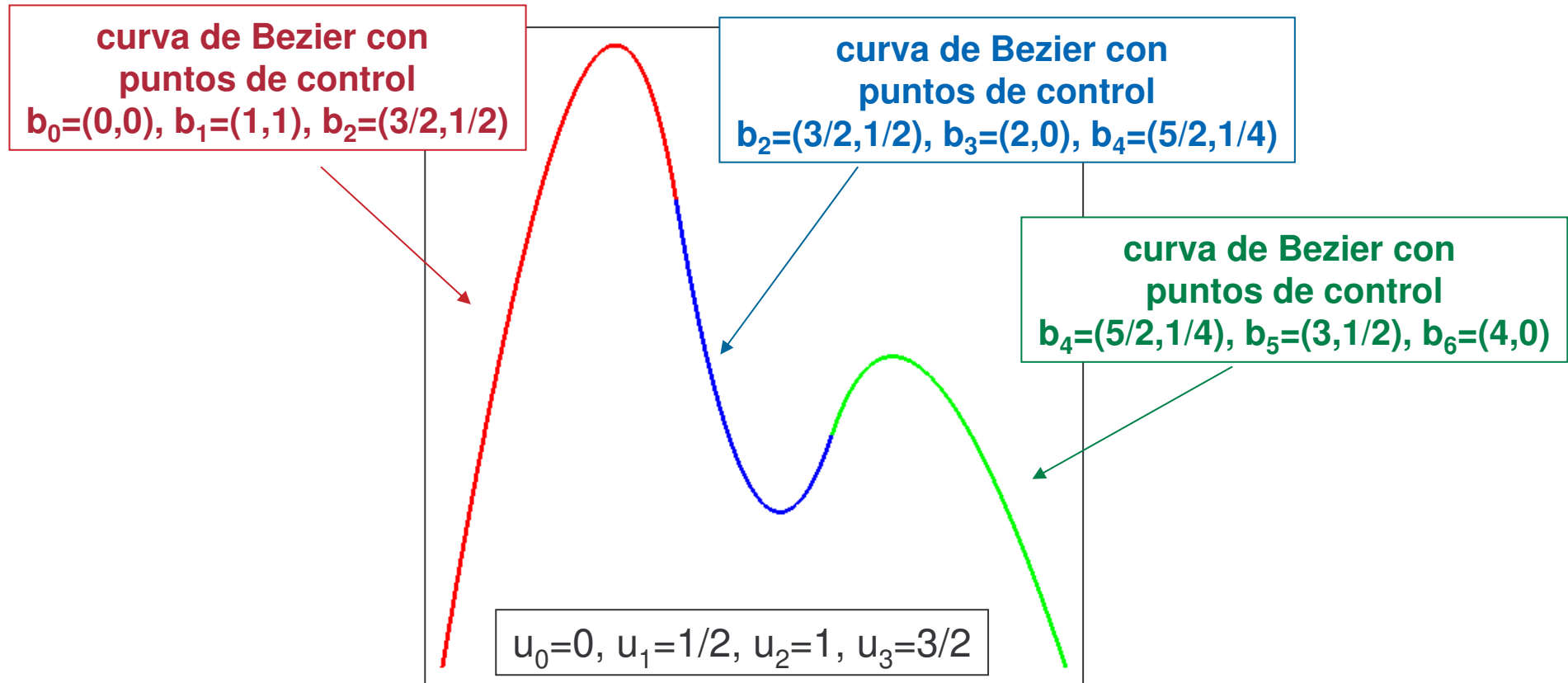
donde  $\lambda$  es un número real positivo

¿Qué significa esta condición?

los puntos  $b_{n-1}$ ,  $b_n$  y  $b_{n+1}$  están alineados con esta configuración:



# Ejemplo de continuidad C<sup>1</sup>



$$\frac{\Delta b_2}{\Delta b_1} = \frac{(1/2, -1/2)}{(1/2, -1/2)} = 1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$$

$$\frac{\Delta b_4}{\Delta b_3} = \frac{(1/2, 1/4)}{(1/2, 1/4)} = 1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

# Continuidad C<sup>1</sup>

---

- Para asegurar la continuidad C<sup>1</sup> nos basta con usar curvas que a trozos sean cuadráticas (curvas de Bezier determinadas por 3 puntos cada una)
- Supongamos que tenemos vector de nodos  $[u_0, u_1, \dots, u_L]$
- Para que cumplir la continuidad C<sup>1</sup>, es suficiente conocer los puntos de control *impares* y  $b_0$  y  $b_{2L}$  y usar la fórmula para hallar los puntos de control *pares*.

$$b_{2i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} b_{2i-1} + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-1} + \Delta_i} b_{2i+1}$$

cada  $s_i$  es la curva de Bezier con puntos de control  $b_{2i}, b_{2i+1}, b_{2i+2}$

# Continuidad C<sup>1</sup>

---

• También se pueden conocer los puntos de unión entre los trozos, y el primer trozo de curva, y deducir mediante la condición “alineados y proporcionales” los demás puntos *impares*.

Datos: vector de nodos  $[u_0, \dots, u_L]$   
puntos pares (primero, último y puntos de unión entre curvas)  
punto  $b_1$ , para trazar el primer trozo de curva.

Calcular:  $b_3, \dots, b_{2L-1}$  usando la condición

$$\frac{b_{2i+1} - b_{2i}}{b_{2i} - b_{2i-1}} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$$

# Propiedades

---

- Propiedad de envolvente convexa fuerte:

Como cada  $s_i$  es una curva de Bezier determinada por 3 puntos, ese trozo de curva está contenida en la envolvente convexa de esos tres puntos (un triángulo). De este modo, la curva  $s(u)$  está contenida en la unión de los triángulos de vértices  $b_{2i}$ ,  $b_{2i+1}$ ,  $b_{2i+2}$ .

- Control local: al modificar un punto de control se modifican a lo sumo dos trozos de la curva.

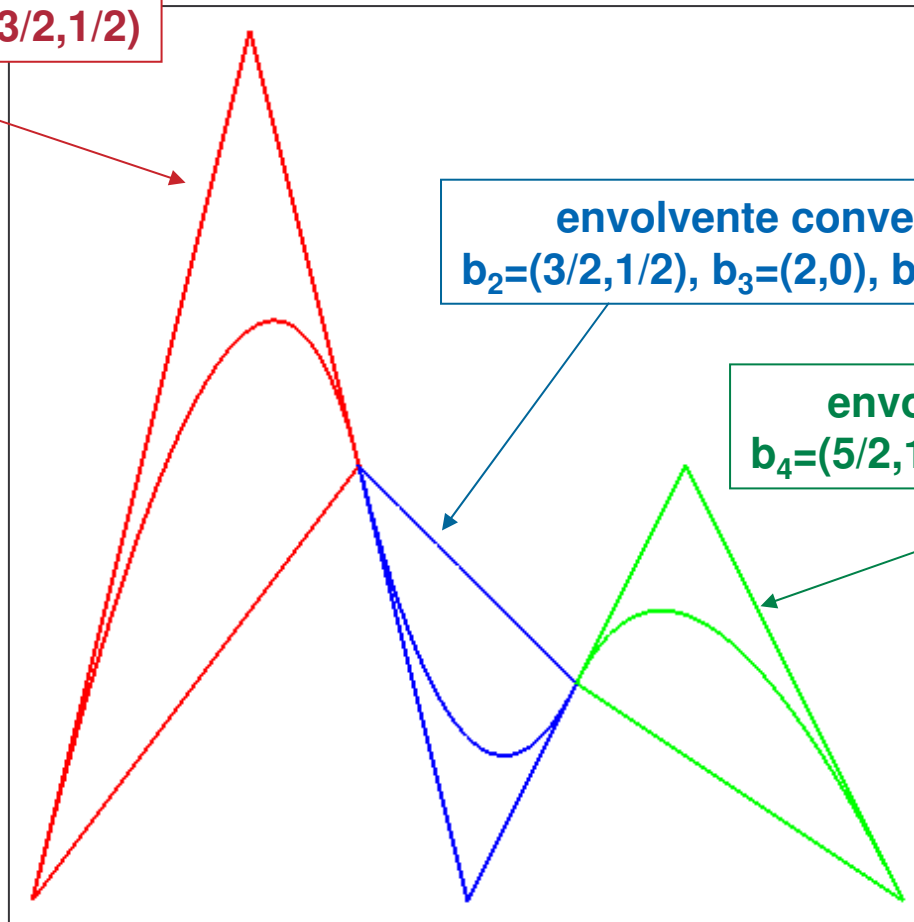
- Se pueden construir curvas con segmentos rectos en su interior.

# Ejemplo. Envolverte convexa fuerte

envolverte convexa de  
 $b_0=(0,0)$ ,  $b_1=(1,1)$ ,  $b_2=(3/2,1/2)$

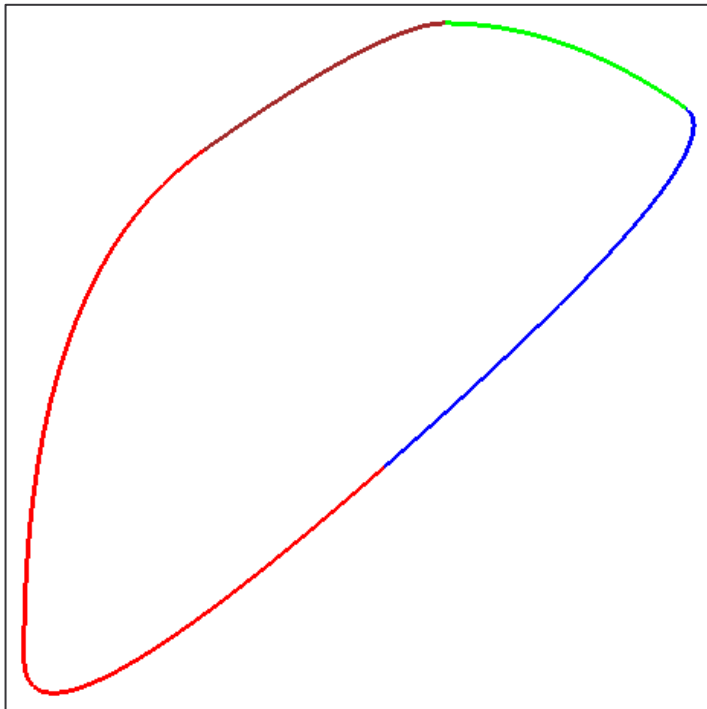
envolverte convexa de  
 $b_2=(3/2,1/2)$ ,  $b_3=(2,0)$ ,  $b_4=(5/2,1/4)$

envolverte convexa de  
 $b_4=(5/2,1/4)$ ,  $b_5=(3,1/2)$ ,  $b_6=(4,0)$



# ¿Cómo construir curvas cerradas?

- Imponemos que  $b_{2L}=b_0$ .
- Es necesario que la derivada por la derecha de  $s(u)$  en  $b_0$  coincida con la derivada por la izquierda de  $s(u)$  en  $b_{2L}$ .



Si con los datos de partida esta condición no se cumple, conservamos la secuencia de nodos, y modificamos el punto  $b_1$  para que sí se dé. Con ese dato, recalculamos los puntos que no sean datos de partida (pares o impares según sea el caso), y las curvas de Bézier de cada tres puntos, y la curva global (reparametrizando).

# Continuidad $C^2$

---

- Si queremos que la unión sea  $C^2$ -continua necesitamos como mínimo que las curvas de Bezier utilizadas sean de grado 3.
- Si  $b_n$  es el punto de unión de dos trozos, la continuidad  $C^2$  influirá en los puntos  $b_{n-2}$ ,  $b_{n-1}$  y  $b_n$  de la primera curva de Bezier, y en los puntos  $b_n$ ,  $b_{n+1}$ ,  $b_{n+2}$  de la segunda.
- Además de pedir que las derivadas primeras coincidan en los puntos de unión de las curvas, habrá que comprobar que las derivadas segundas por la derecha y por la izquierda y también coinciden.

# Continuidad $C^2$

- Geoméricamente, equivale a imponer la condición de continuidad  $C^1$  en el punto  $b_n$  (involucra a  $b_{n-1}$ ,  $b_n$  y  $b_{n+1}$ ), y exigir que exista un punto  $d$  que cumpla:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= (1-t_1)b_{n-2} + t_1 d \\ b_{n+1} &= (1-t_1)d + t_1 b_{n+2} \end{aligned}$$

$$\text{donde } t_1 = (u_1 - u_0) / (u_2 - u_0)$$

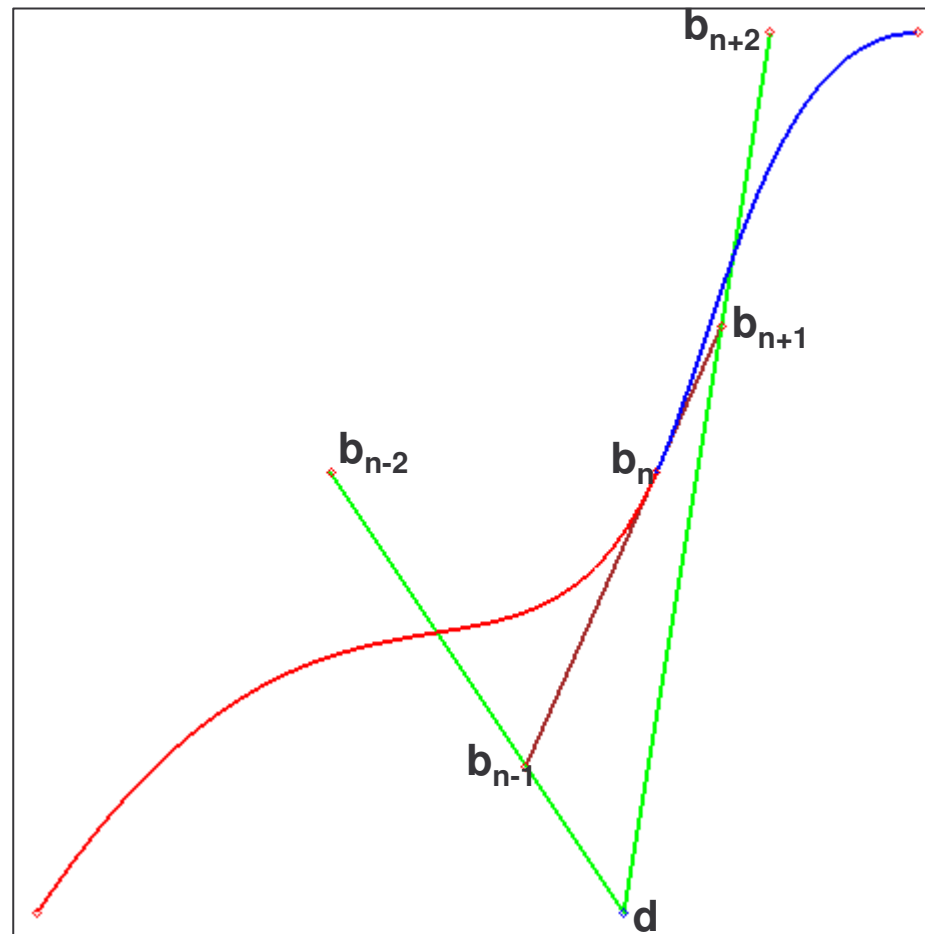
- Si queremos comprobar si una curva  $C^1$  es  $C^2$ -continua en  $b_n$ , basta aplicar por separado las fórmulas

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= (1-t_1)b_{n-2} + t_1 d_1 \\ b_{n+1} &= (1-t_1)d_2 + t_1 b_{n+2} \end{aligned} \quad \text{donde } t_1 = (u_1 - u_0) / (u_2 - u_0)$$

y comprobar si  $d_1 = d_2$ .

# Ejemplo de continuidad $C^2$

---



# Otras curvas de Bezier compuestas

---

Interpolante cúbico de Hermite:

- Las condiciones iniciales son el vector de nodos, los puntos de unión entre curvas, y las derivadas de la curva en los puntos de unión.
- Se buscan curvas a trozos con 4 puntos de control cada una que en los puntos de unión su derivada coincida con el dato correspondiente.
- A partir de los datos, se construye una curva  $C^1$ -continua, llamada el interpolante cúbico de Hermite.

**Ejercicio:** ¿Cómo calcularías los puntos de control que faltan para hallar las curvas de Bezier cúbicas que forman el interpolante? Escribe un algoritmo para calcular el interpolante cúbico de Hermite.