

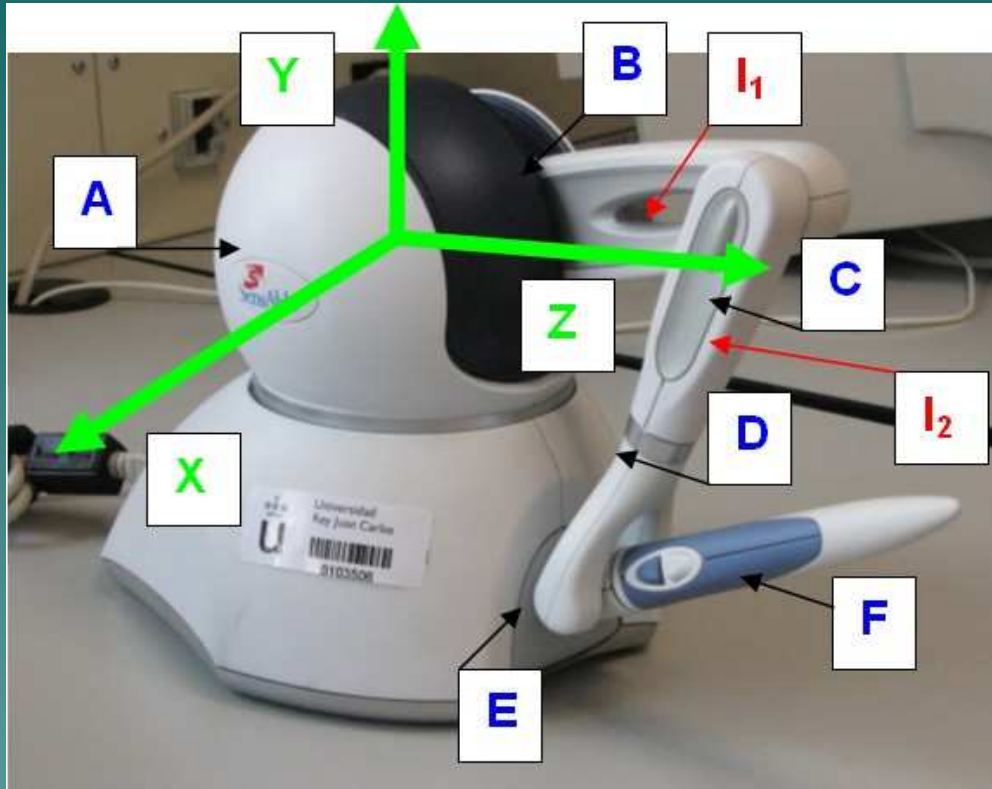


Master en Informática  
Gráfica, Juegos y Realidad  
Virtual

Tema 3: Conceptos  
Teóricos

*José San Martín*

# Mecánica de hápticos: PHANToM OMNi

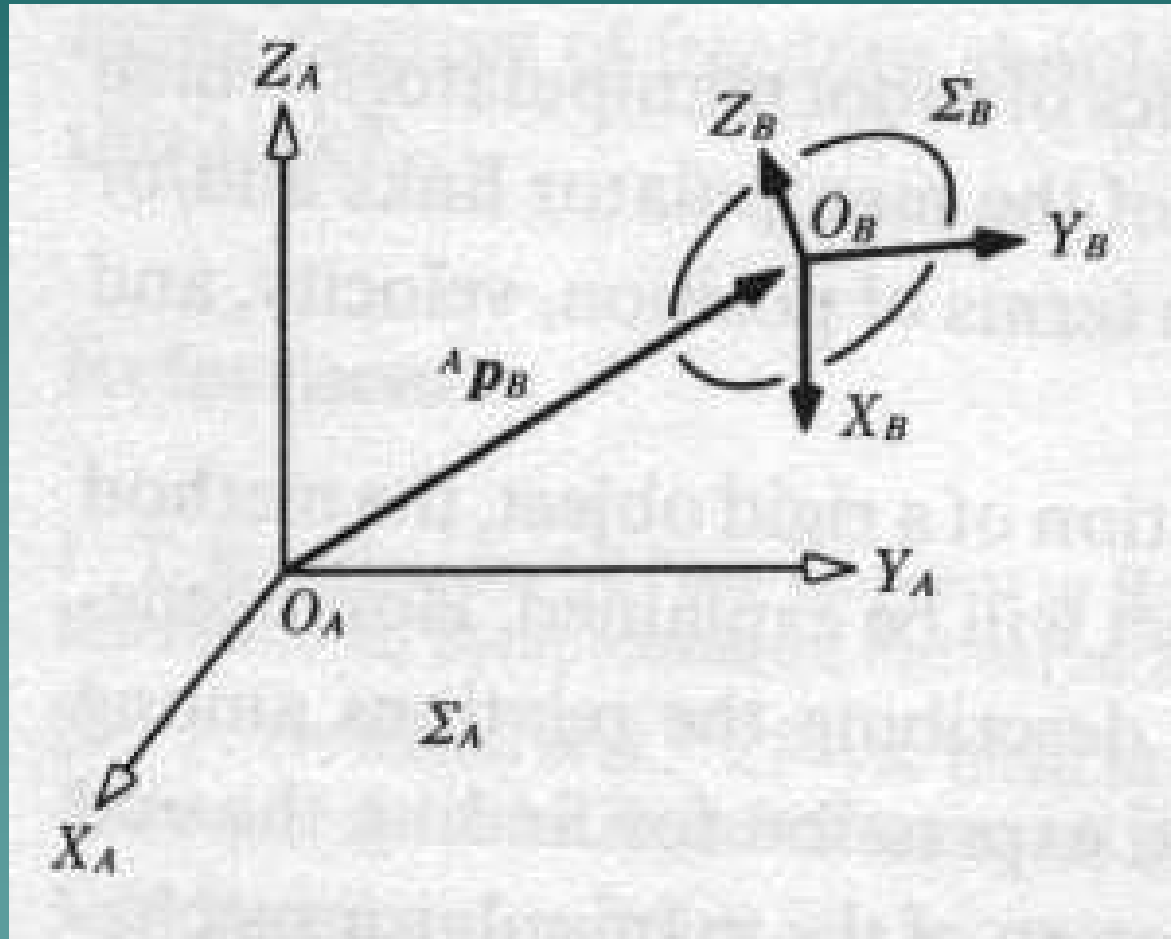


- ◆ A gira alrededor del eje Y definiendo el ángulo  $\theta_1$ . B gira alrededor del eje X definiendo el ángulo  $\theta_2$ . C gira alrededor del eje X' relativo definiendo el ángulo  $\theta_3$ .
- ◆ D, E y F son ejes ortogonales situados en el Elemento Final y son ángulos Gimbal.

# Sistemas de Referencia

- Sistema de coordenadas ortogonales.
- Dados dos sistemas de coordenadas ortogonales siempre existe un giro y una traslación que relacionan las medidas de esos dos sistemas de coordenadas.
- Vectores unitarios.
- Determinación de coordenadas respecto al sistema de referencia escogido.

# Sistemas de Referencia



# Sistemas de Referencia

- Un sistema de referencia se define por un conjunto  $(O, E)$  más un punto  $P$  del espacio [Bar97].
- El primer elemento  $O$  es un punto de referencia, normalmente perteneciente a un objeto físico, a partir del cual se consideran las coordenadas de posición de un punto  $P$  (o un sólido rígido).

# Sistemas de Referencia

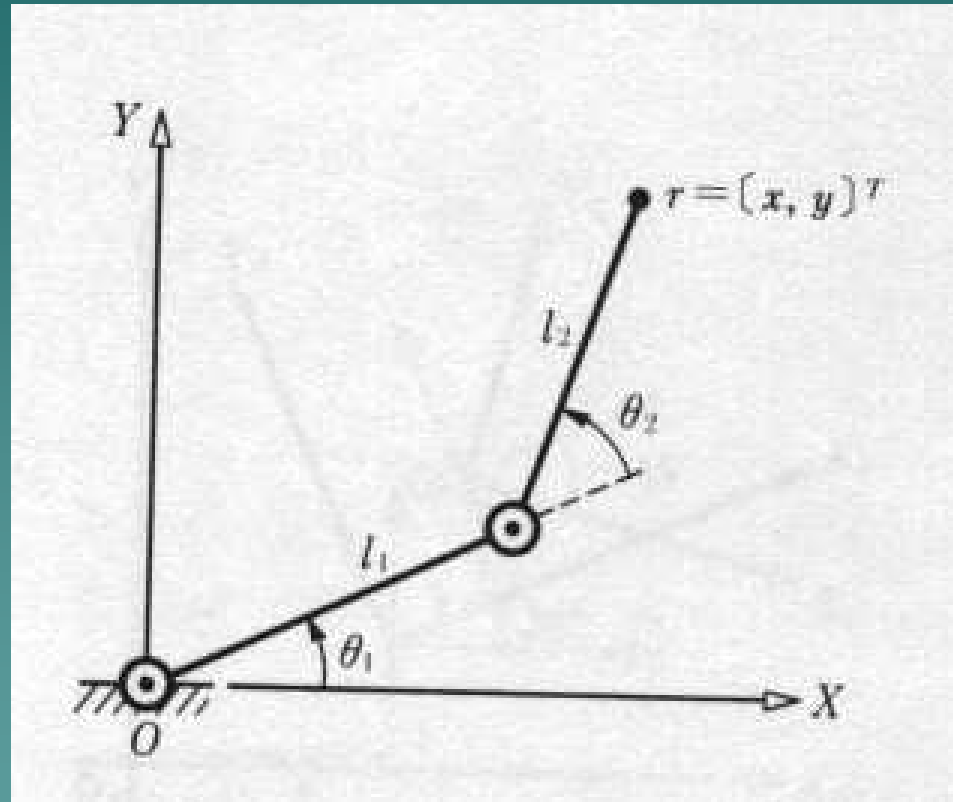
- El elemento E es un conjunto de ejes de coordenadas. Los ejes de coordenadas tienen como origen de coordenadas en el punto de referencia O, y sirven para determinar la dirección y el sentido del cuerpo en movimiento (o expresar respecto a ellos cualquier otra magnitud física vectorial o tensorial).
- También hay que considerar el origen en el tiempo, un instante a partir del cual se mide el tiempo, durante el cual, la posición del punto P, y por tanto del sólido que representa, va variando.

# Sistemas de Referencia

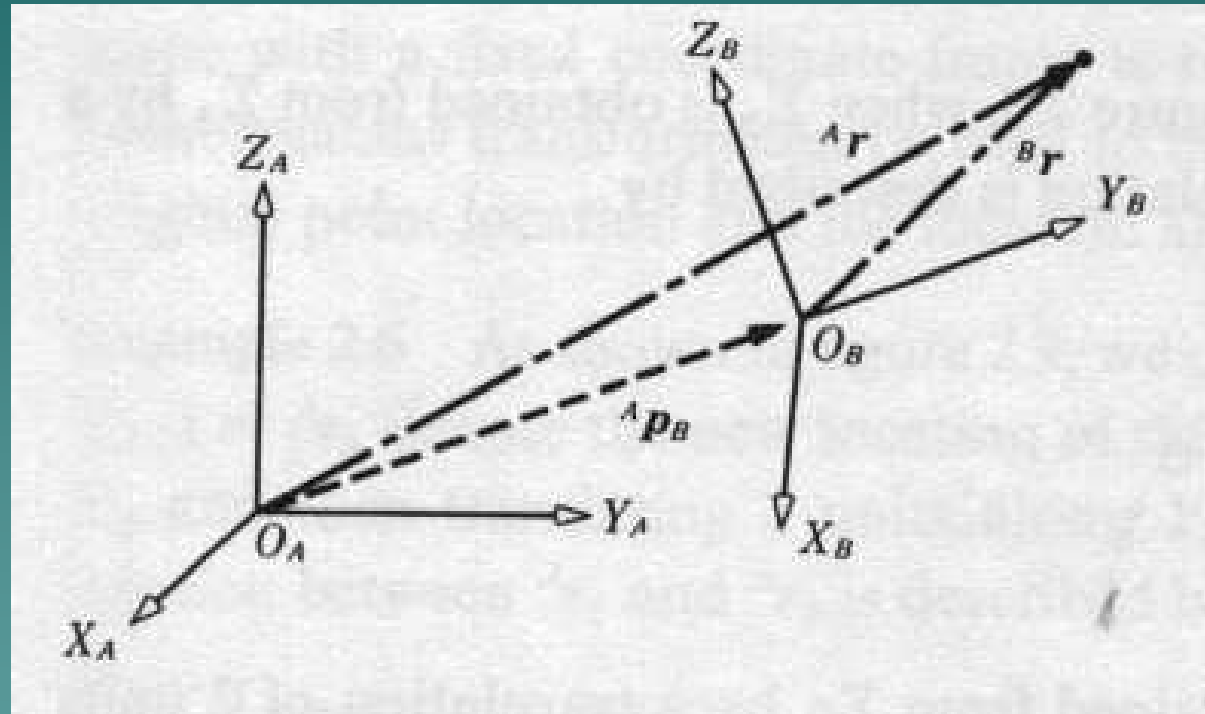
- En cinemática el origen temporal coincide habitualmente con el inicio del movimiento que se estudia.
- Los elementos: punto de referencia, ejes de coordenadas y origen temporal, forman el sistema de referencia. Para poder utilizar un sistema de referencia debemos determinar la escala de las coordenadas, escogiendo una determinada magnitud espacial, temporal.

# Sistemas de Referencia

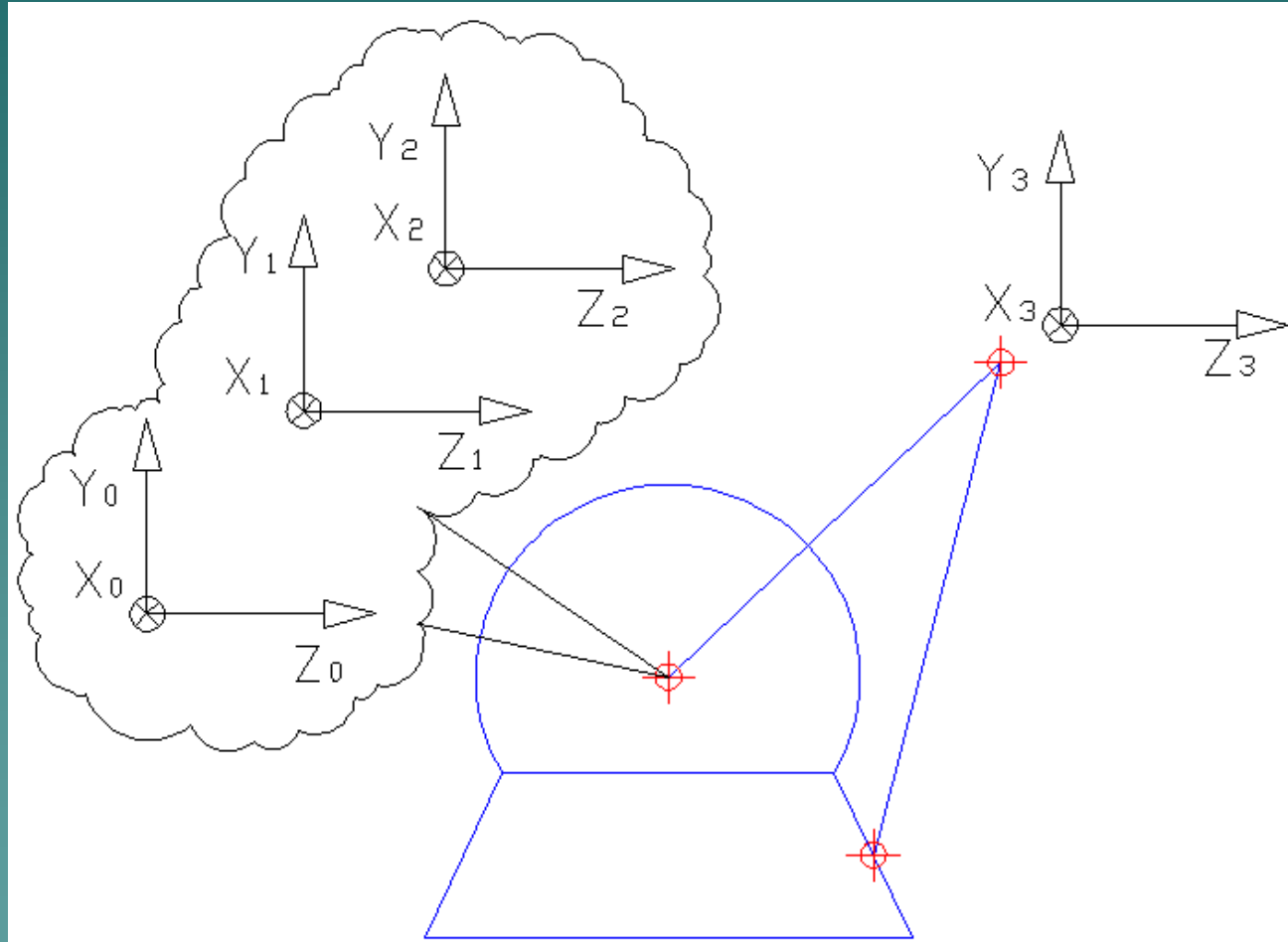
- Sistemas de referencia solidarios a cada articulación.
- Observadores.
- Referencias de Ángulos absolutos y relativos.



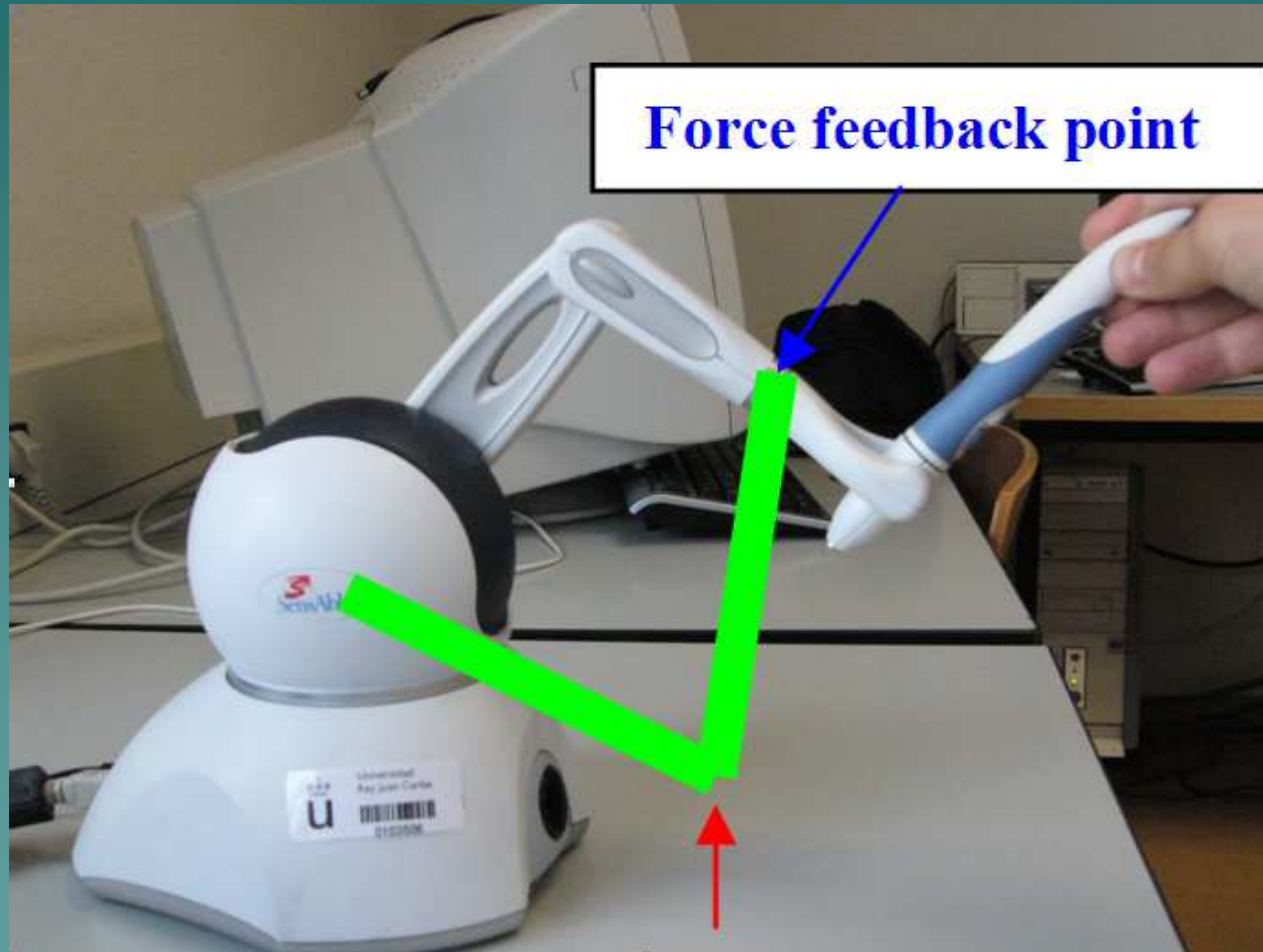
# Sistemas de Referencia



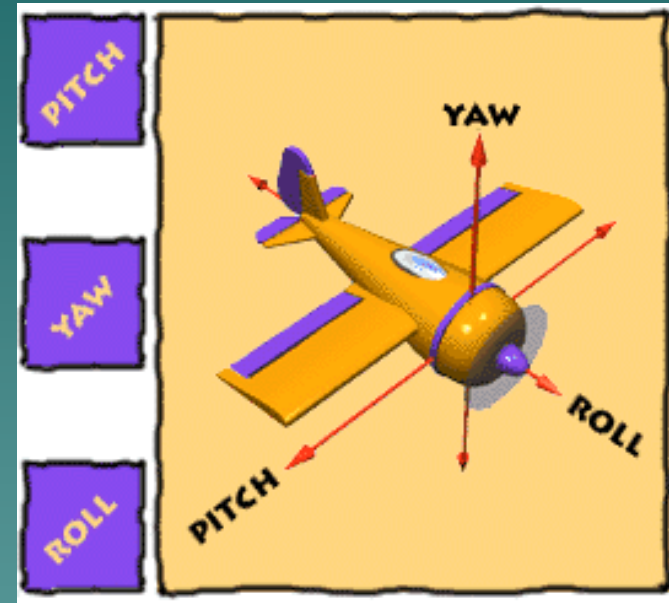
# Sistemas de Referencia



# Sistemas de Referencia

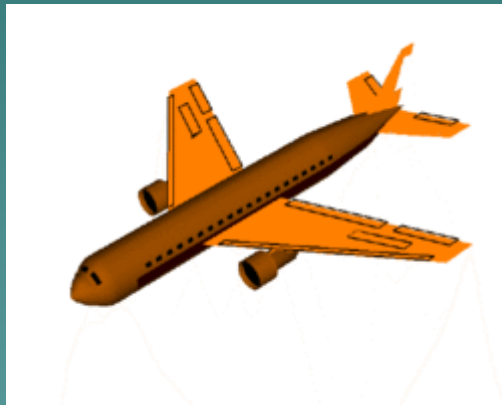


# Ángulos de rotación



# Ángulos de rotación

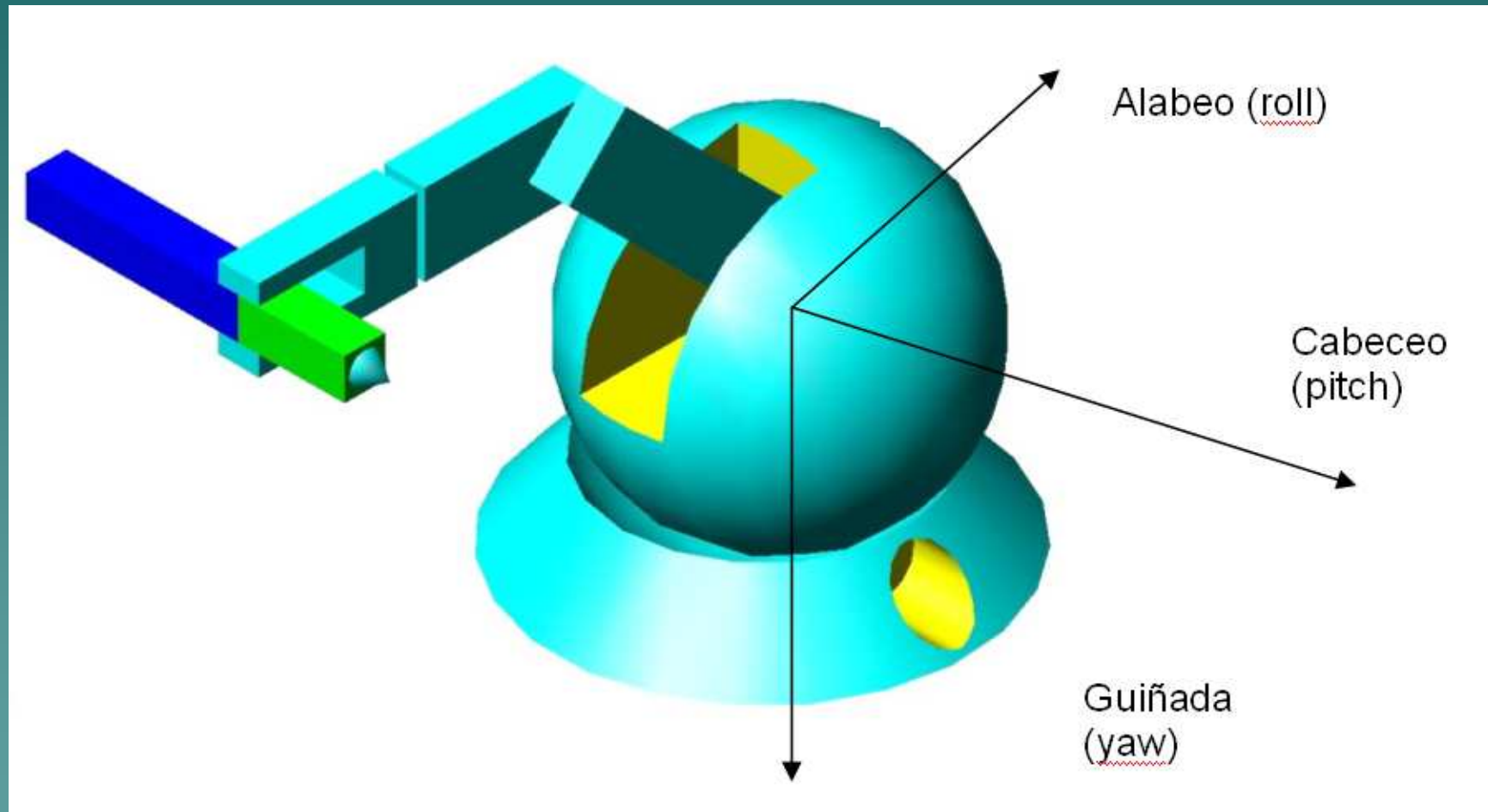
Yaw



Roll

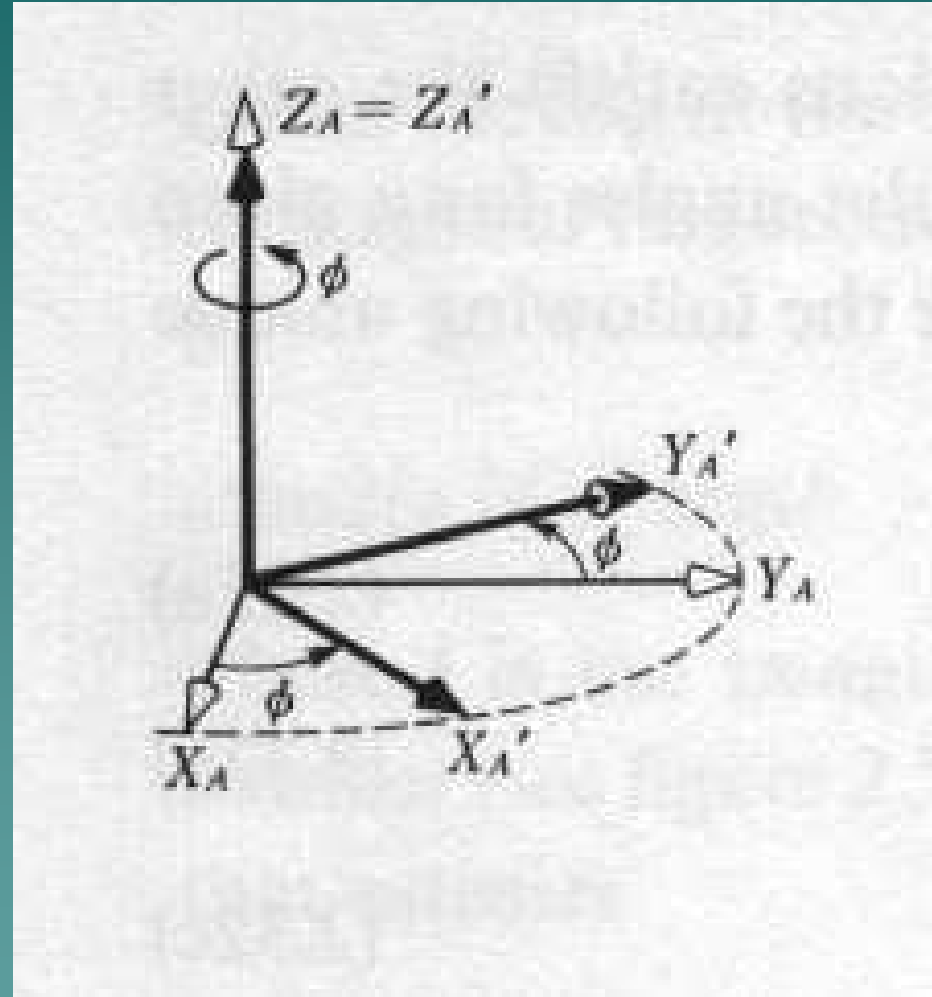


# Ángulos de rotación



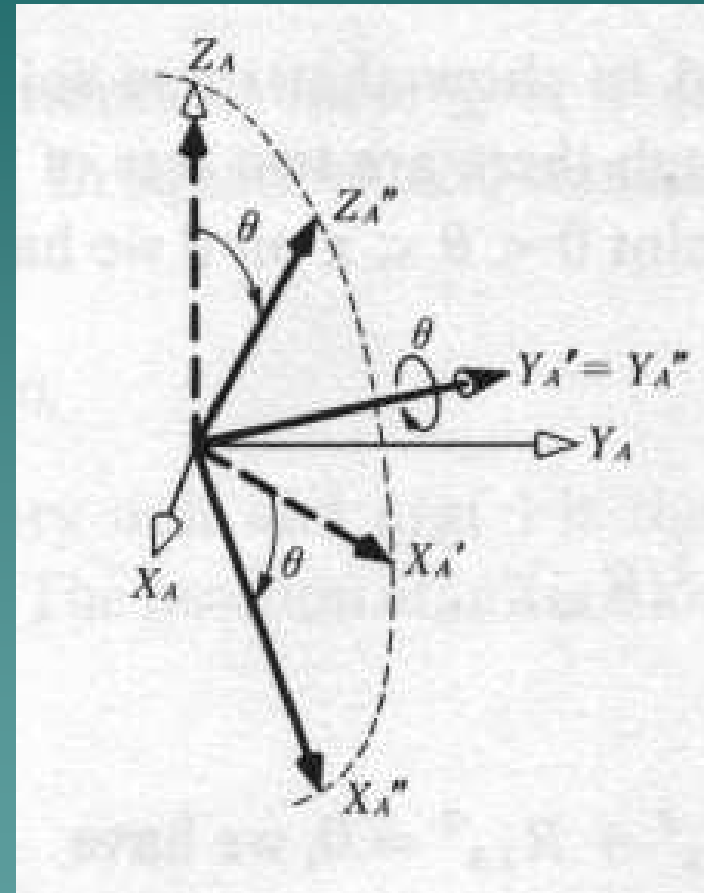
# Ángulos de rotación

- Roll (Alabeo): movimiento respecto del eje longitudinal.



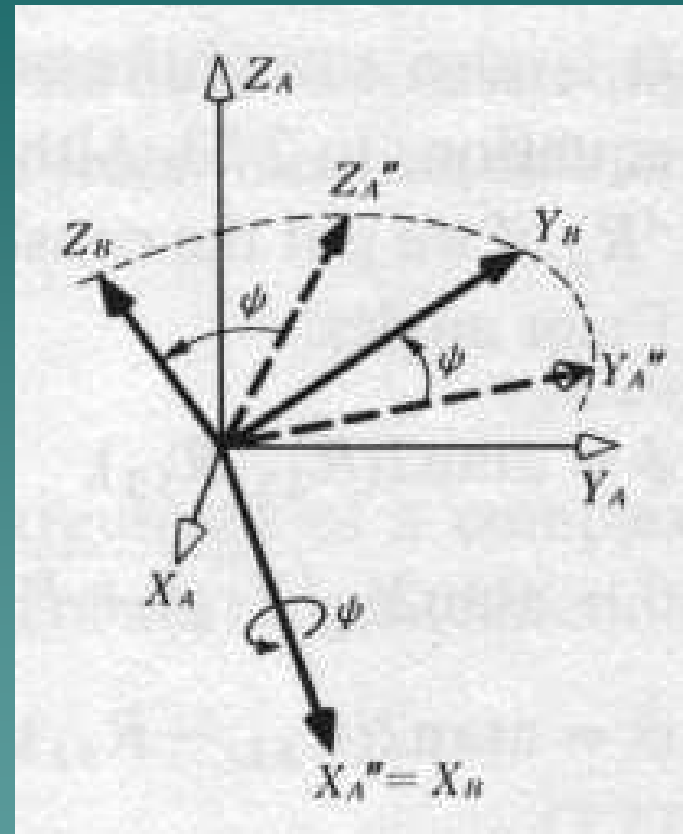
# Ángulos de rotación

- Pitch (cabeceo):  
Movimiento respecto  
del eje lateral



# Ángulos de rotación

Yaw (Guiñada). Giro del objeto respecto del eje imaginario vertical que pasa por el centro de gravedad.



# Áreas de trabajo

- ◆ Para un dispositivo háptico se pueden definir las siguientes zonas de trabajo:
  - Área de Trabajo Nominal.
  - Área de Trabajo Real.
  - Área de Trabajo de la Aplicación.

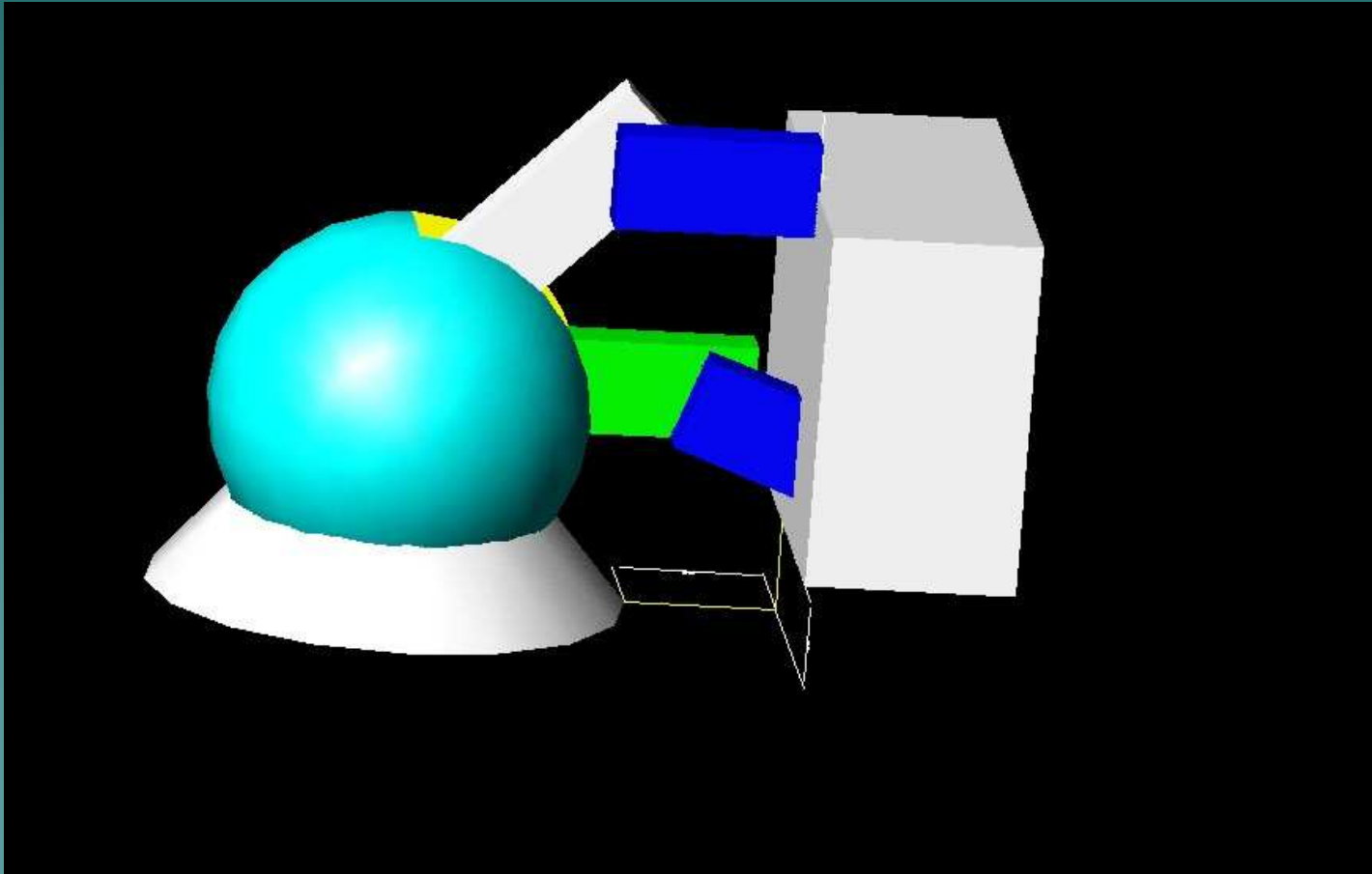
# Áreas de trabajo

- ◆ **Espacio de trabajo nominal:**
- ◆ Es el volumen en el cual el fabricante del dispositivo garantiza la precisión y realimentación de fuerza especificada en la hoja de características.

# Áreas de trabajo

- ◆ Por ejemplo, en el caso del dispositivo háptico PHANTOM OMNi se trata de un prisma rectangular de dimensiones (160 Ancho, 120 Alto, 70 Profundidad) mm.
- ◆ Se encuentra situado a una cierta distancia del dispositivo, la distancia depende del punto de referencia escogido, en el caso de elegir el inkwell es de  $d=55\text{mm}$  y  $h=35\text{mm}$  aprox.

# Áreas de trabajo



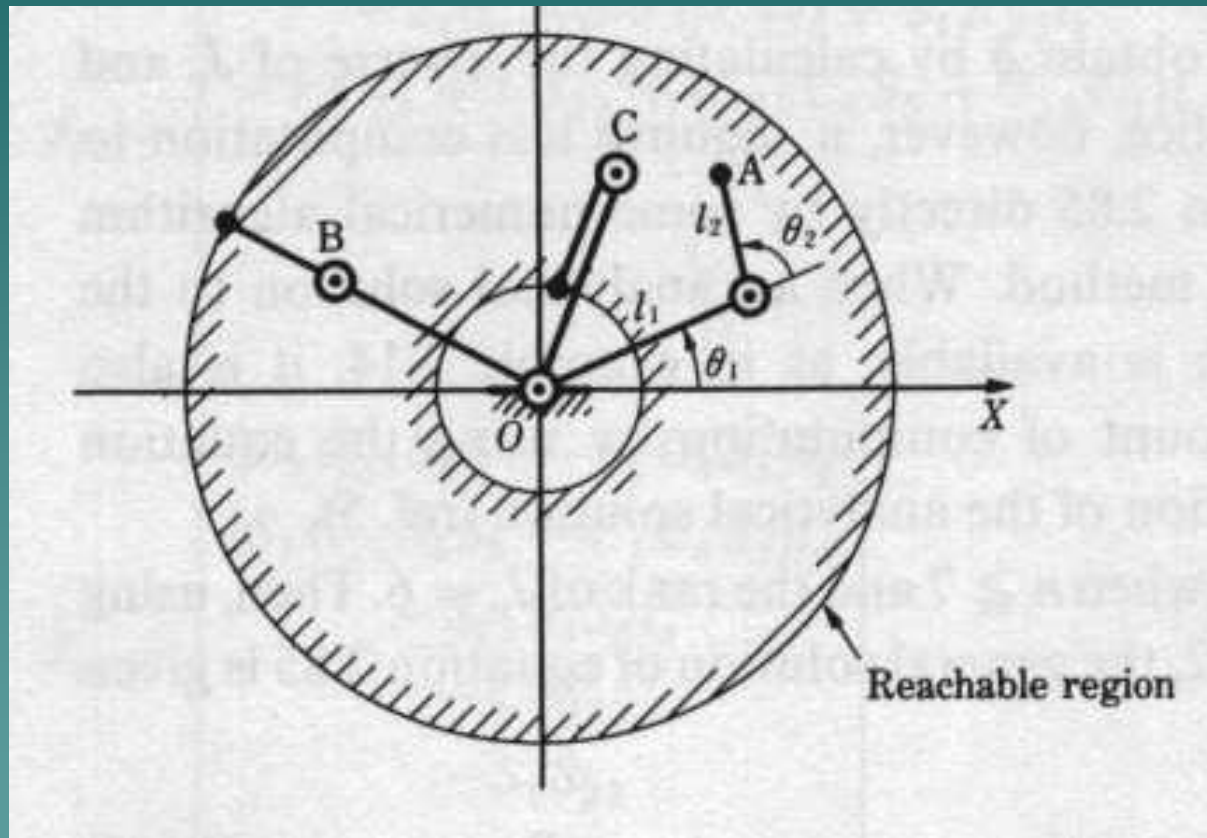
# Áreas de trabajo

- ◆ Espacio de trabajo real.
- ◆ Se trata del volumen que es posible recorrer con el extremo del manipulador.
- ◆ Normalmente es bastante mayor al espacio de trabajo nominal.

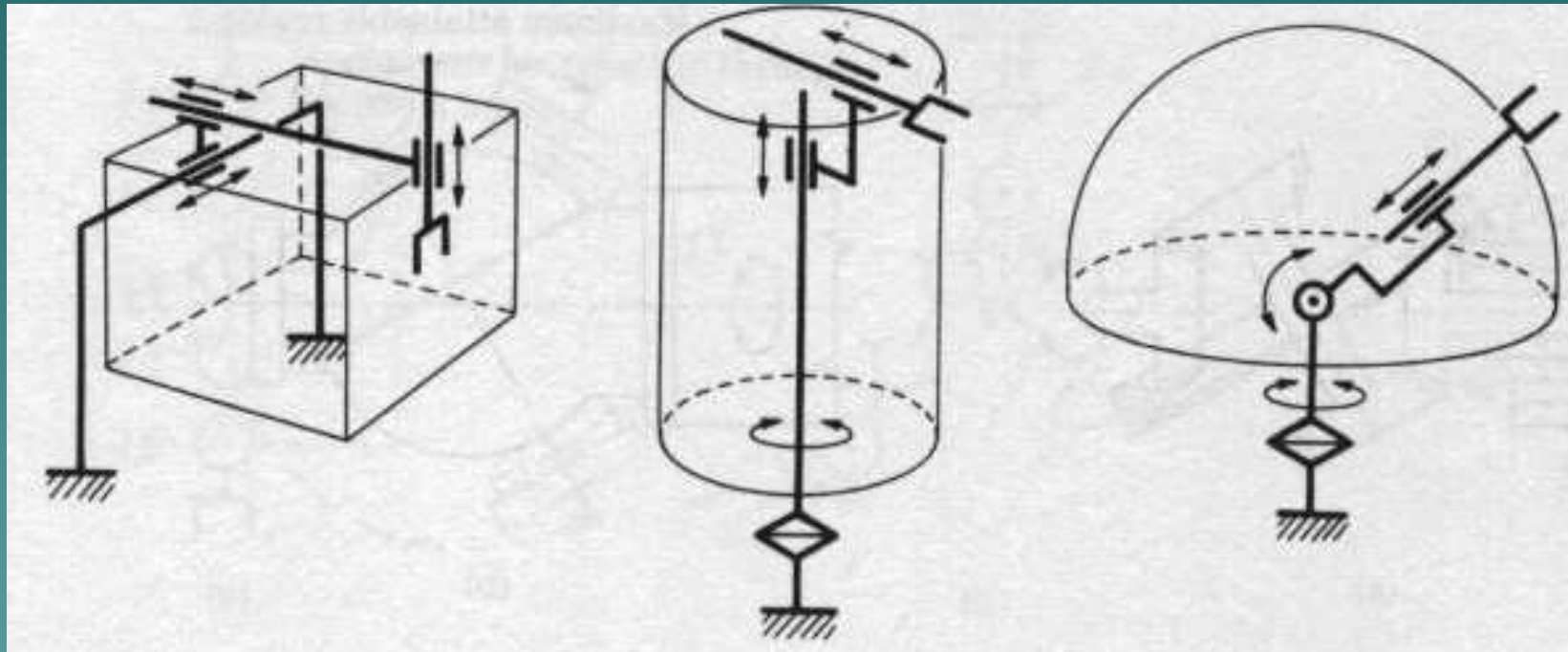
# Áreas de trabajo

- ◆ No obstante este espacio real incluye zonas marginales donde el comportamiento del dispositivo puede ser inaceptable para algunas aplicaciones o además de inestable.
- ◆ Debe calcularse a partir de las características reales del dispositivo (longitud de los eslabones de la cadena cinemática, rangos máximos de las articulaciones).

# Áreas de trabajo



# Áreas de trabajo



# Áreas de trabajo

- ◆ Ejemplo: PHANToM OMNi
- ◆ De acuerdo a los rangos de los ángulo  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se puede describir la curva máxima que el extremo del manipulador puede alcanzar en el plano YZ (Espacio Real).
- ◆ Rango de valores de  $\theta_1$  de  $-50^\circ$  a  $55^\circ$ .
- ◆ Rango de valores de  $\theta_2$  de  $0^\circ$  a  $105^\circ$ .
- ◆ Valores de  $\theta_3$  dependen de los de  $\theta_2$ .

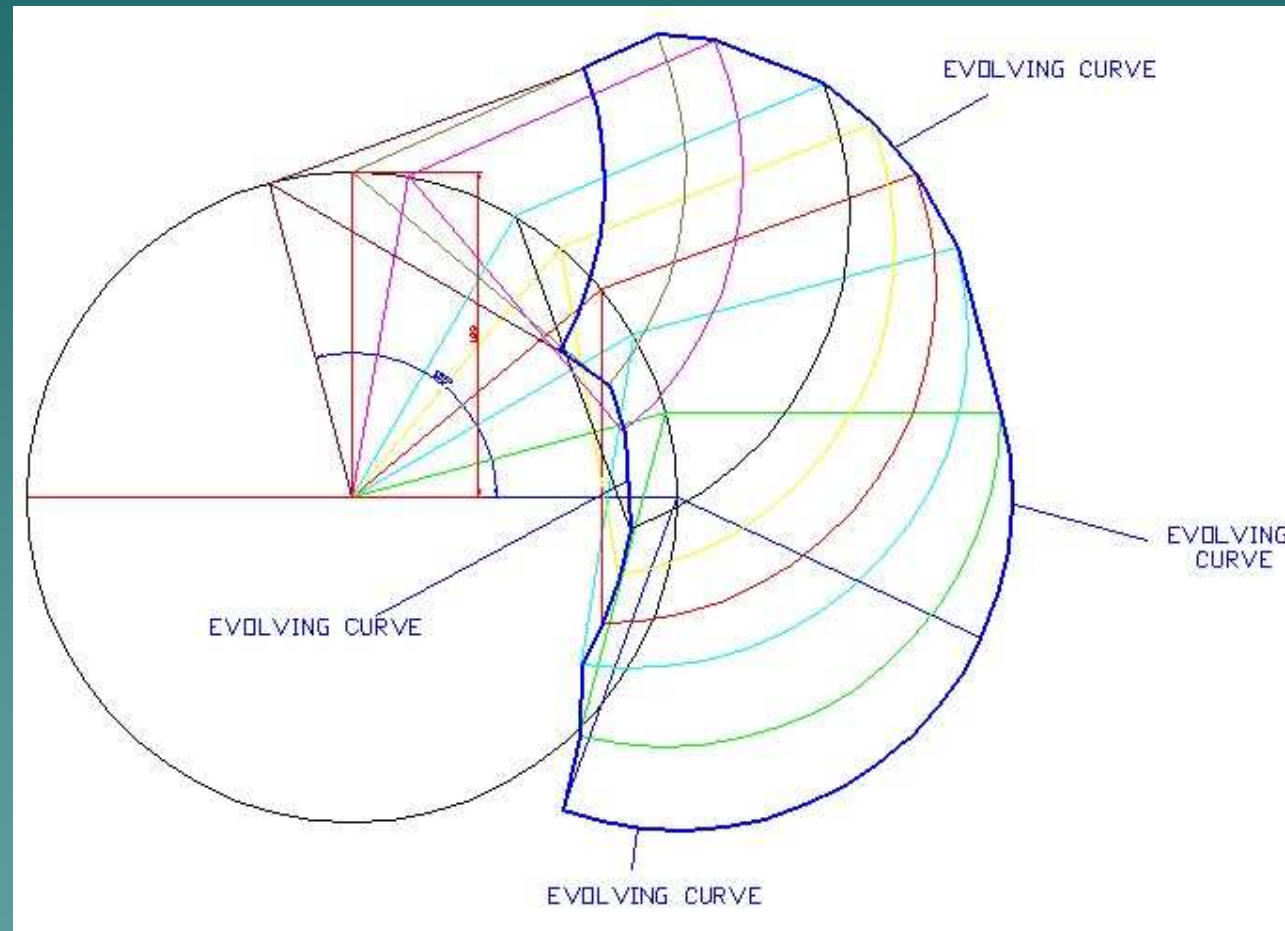
# Áreas de trabajo

$\theta_2$	$\theta_3$ min	$\theta_3$ max
0	-20	65
15	-15	90
30	-9	105
40	0	110
50	10	112
60	20	113
80	40	114
90	50	114
105	60	110

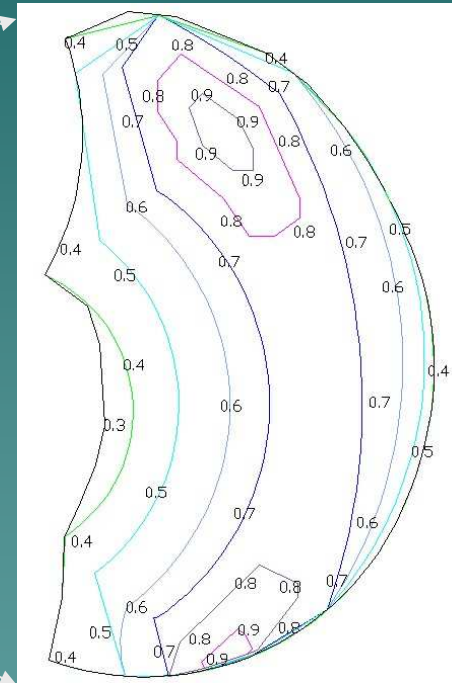
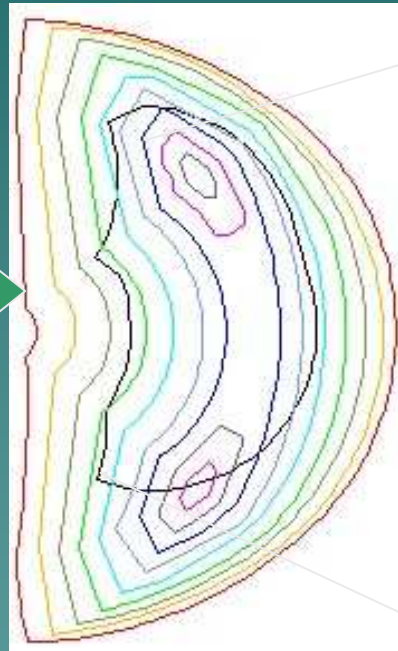
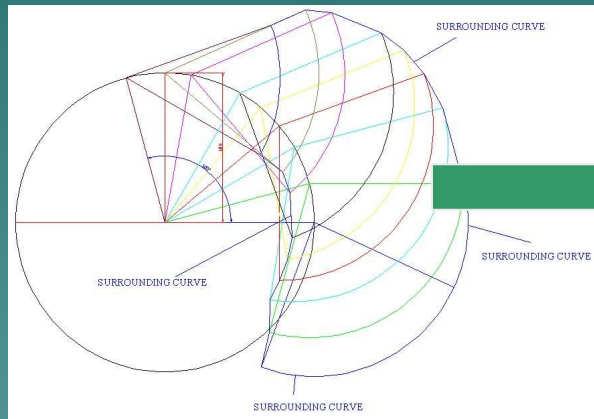
# Áreas de trabajo

- ◆ Teniendo en cuenta el rango de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se traza la curva que define el alcance máximo del extremo del manipulador como envolvente de todos los puntos que se pueden alcanzar en el plano (Espacio Real-ER).
- ◆ Esta envolvente es el subvolumen físico del espacio real en el que nuestro dispositivo puede trabajar.

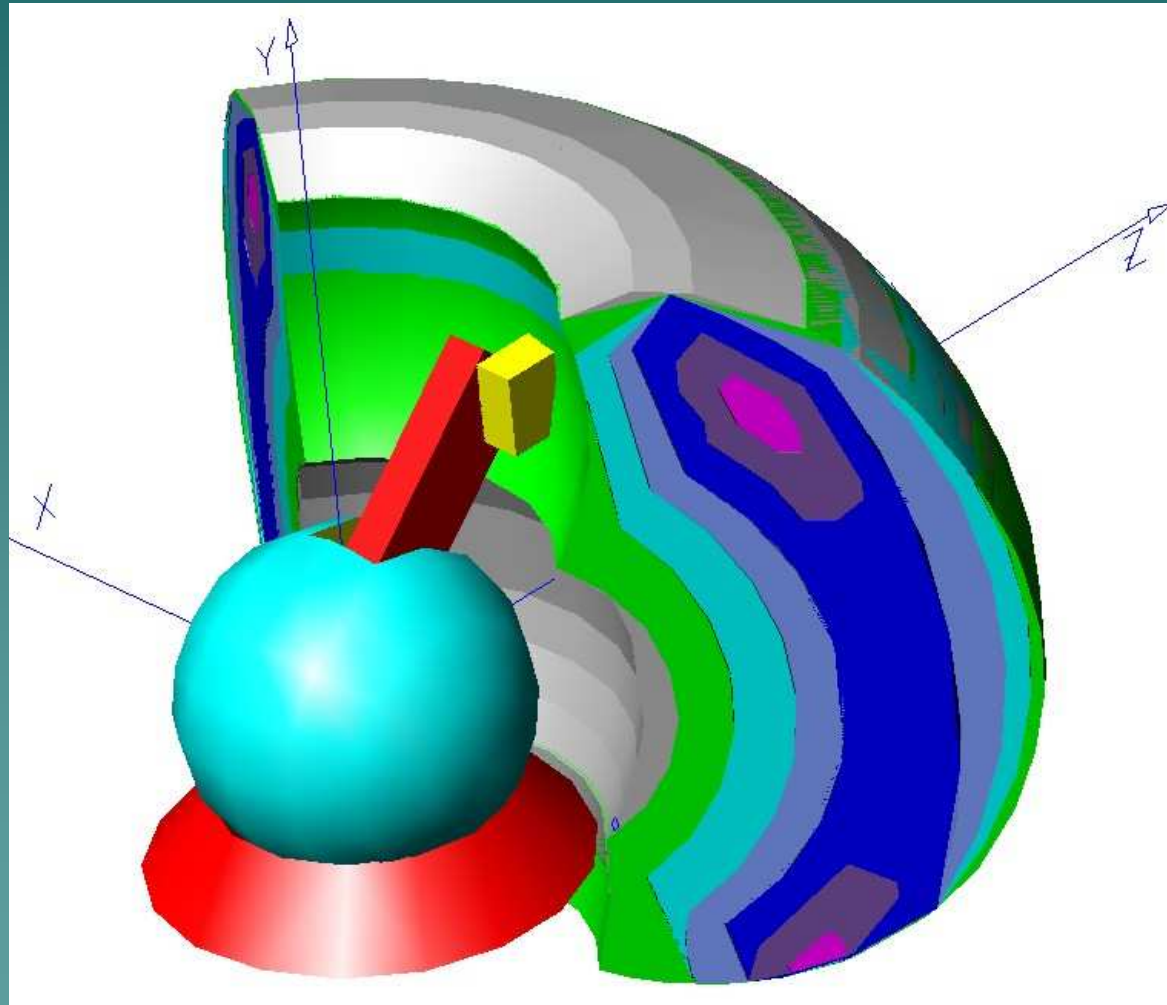
# Áreas de trabajo



# Áreas de trabajo



# Áreas de trabajo



Manipulación y Control de  
Dispositivos Hápticos

# Áreas de trabajo

- ◆ Espacio de trabajo de la aplicación.
- ◆ Si se define una determinada simulación virtual, es el volumen de uso de la aplicación. El entorno virtual seleccionado.
- ◆ Por tanto, para un mismo dispositivo háptico, con las mismas áreas de trabajo nominal y real, es diferente dependiendo de la simulación que se esté realizando, de la tarea implementada en cada ocasión.

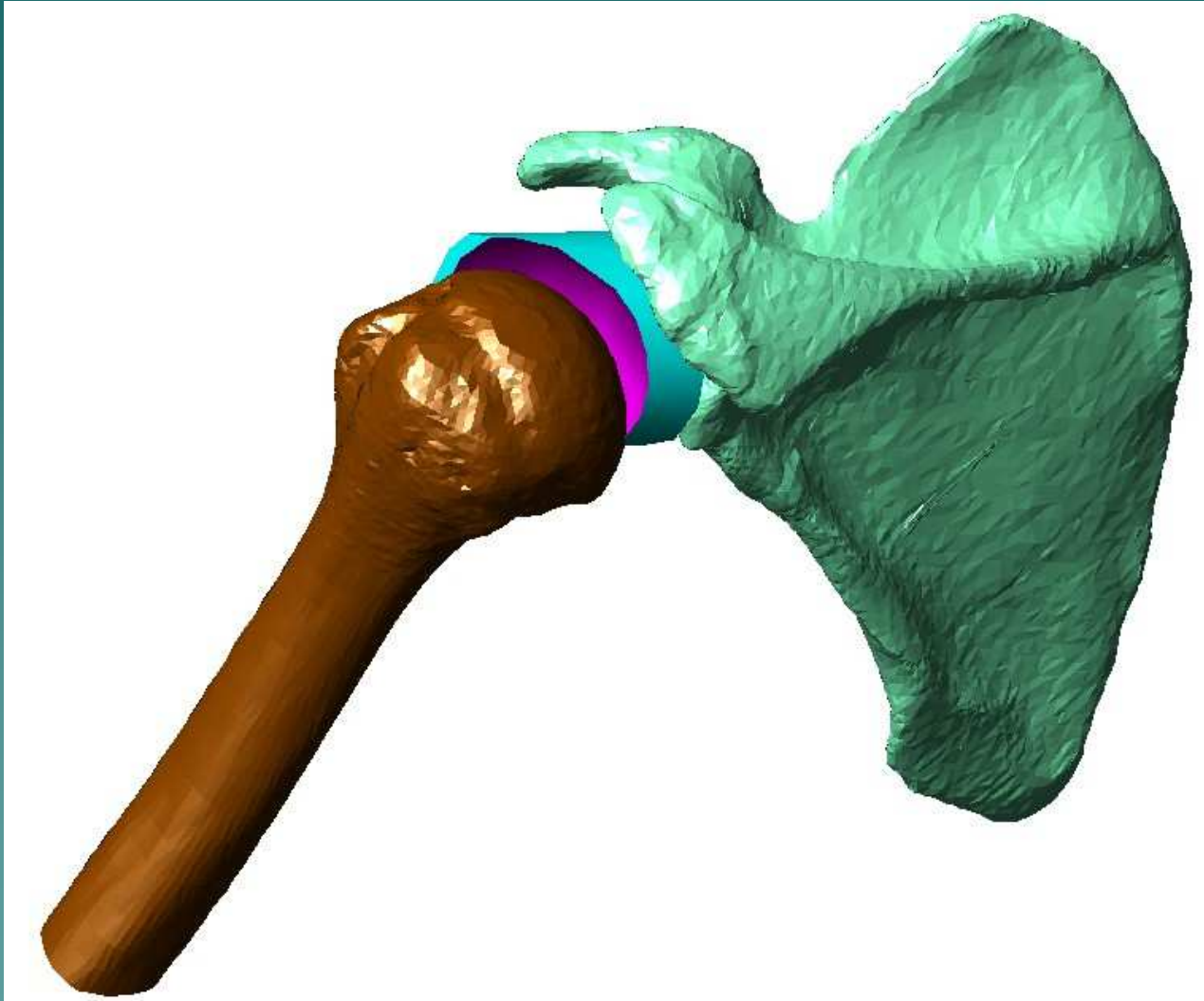
# Áreas de trabajo

- ◆ Es posible incorporar restricciones que impidan que podamos salir de ese entorno virtual. Por ejemplo sería el espacio de trabajo usado por un cirujano dentro de una rodilla en una simulación de cirugía mínimamente invasiva.
- ◆ La importancia de la forma y el tamaño del AA para el objetivo de obtener un correcto funcionamiento del dispositivo.

# Áreas de trabajo

- ◆ Debemos distinguir conceptualmente que el espacio de la aplicación es un concepto del mundo virtual, mientras que el espacio real es un concepto del mundo real.
- ◆ Tanto el AA como el AN son subconjuntos de AR. No obstante, si no se definen restricciones en el espacio de trabajo virtual, que correspondería con AA, éste coincidiría con AR.

# Áreas de trabajo



Manipulación y Control de  
Dispositivos Hápticos

# Áreas de trabajo

- ◆ Contamina la percepción de inmersión, dada la posibilidad de que navegando por el espacio virtual encontremos un límite del espacio real (el extremo del rango de uno de los grados de libertad), esto es, del límite de la zona de trabajo real AR del dispositivo háptico.
- ◆ En el mundo virtual no puede haber colisiones con objetos o límites del mundo real.
- ◆ Pérdida de inmersión.

# Áreas de trabajo

- ◆ Si la aplicación va a requerir un espacio de la simulación reducido (entrenador de artroscopia de hombro) en este caso es posible que nos movamos en un cubo de 50 mm de lado.
- ◆ El sistema óptimo será el encaje ese cubo que representa el espacio de trabajo de la aplicación en la parte del espacio en la que el dispositivo háptico proporciona sus mejores prestaciones.

# Impedancia vs. Admitancia

- ◆ Control de un dispositivo háptico: control de impedancia o admitancia.
  - **Impedancia**: el usuario mueve el dispositivo, y el dispositivo reaccionará con una fuerza si es necesario. Esta es la interacción básica entre el usuario y el lazo de control.
  - El paradigma es: "el desplazamiento entra - la fuerza sale". Ej. PHANTOM.

# Impedancia vs. Admitancia

- ◆ Control de un dispositivo háptico: control de impedancia o admitancia.
  - **Admitancia**: el dispositivo mide las fuerzas que el usuario ejerce sobre él, y reacciona con el movimiento (la aceleración, la velocidad, la posición).
  - El paradigma es: "fuerza entra - desplazamiento sale". Ej.: HapticMaster.

# Impedancia

- ◆ El caso que encontraremos con más frecuencia será el de la impedancia, el flujo de control incluirá los siguientes eventos:
  - Sensores de desplazamiento recogen el movimiento.
  - Envío mediante driver de este desplazamiento al simulador software.
  - Simulador identifica si hay colisión o no y de que magnitud.

# Impedancia

- Se envía señal al driver.
- Driver ordena al háptico mantener una determinada posición.
- Háptico hace la fuerza necesaria para mantener esa posición.

# Pasividad

- ◆ Es un concepto de estabilidad del sistema en el que se compara la energía que se disipa y la que se almacena en el sistema.
- ◆ Un sistema es estable si:  
Tasa de disipación de energía  $>$  Tasa de almacenamiento de energía.

# Grados de libertad

- Un cuerpo aislado en el espacio libre de ligaduras, puede desplazarse libremente en un movimiento que se puede descomponer en 3 rotaciones y 3 traslaciones geométricas independientes (traslaciones y rotaciones respecto de ejes fijos de un sistema de referencia escogido).
- En un mecanismo, cada uno de sus componentes (eslabones del mecanismo) se haya unido a uno o varios eslabones más. Esto supone la restricción de algunos movimientos. Se conocen como **grados de libertad** los diferentes movimientos independientes que aún así es posible efectuar.

# Grados de libertad

## Definición

- También se definen los **grados de libertad** como el número mínimo de velocidades necesarias para caracterizar el estado cinemático de un mecanismo.
- El número de grados de libertad coincide con el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento.
- Podemos calcular, en mecanismos planos, cuyo movimiento tiene lugar sólo en dos dimensiones, el número de grados de libertad atendiendo al *criterio de Grübler-Kutzbach*:

# Grados de libertad

$$GL = 3(n-1) - 2j_1 - 2j_2$$

donde:

*GL*: Grados de libertad del mecanismo.

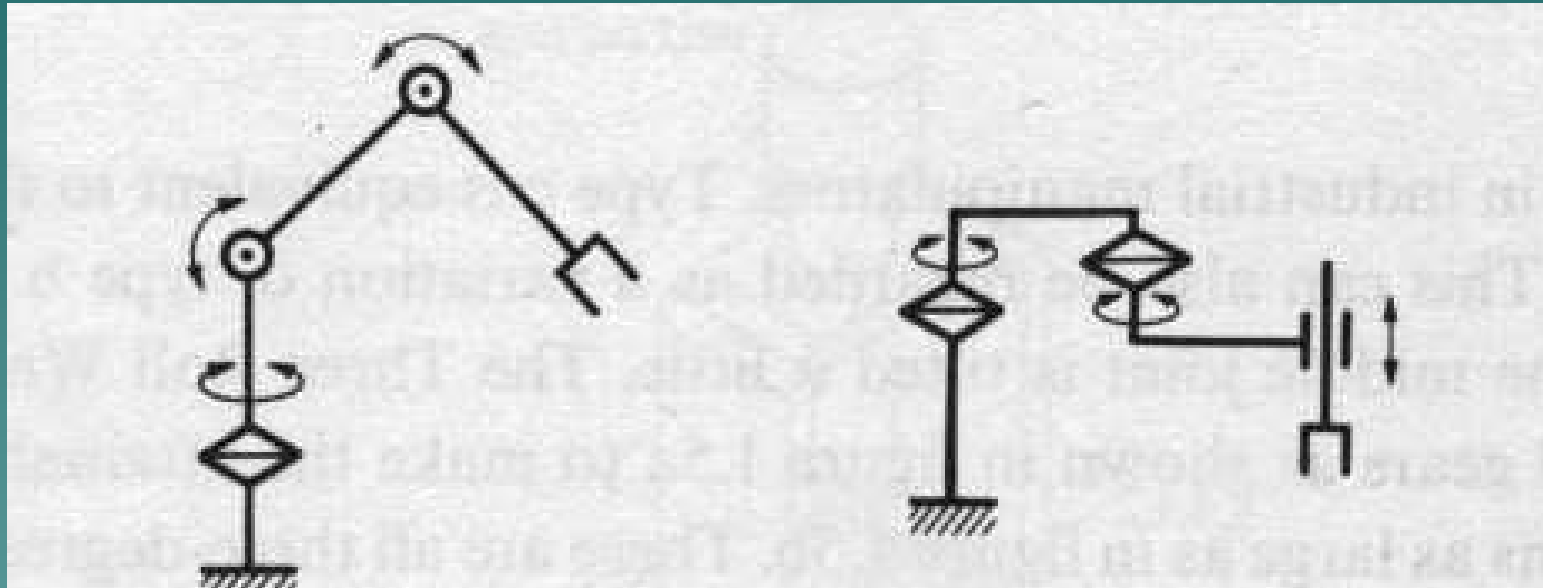
*n*: Número de elementos de un mecanismo.

*j*<sub>1</sub>: Número de articulaciones de 1 grado de libertad.

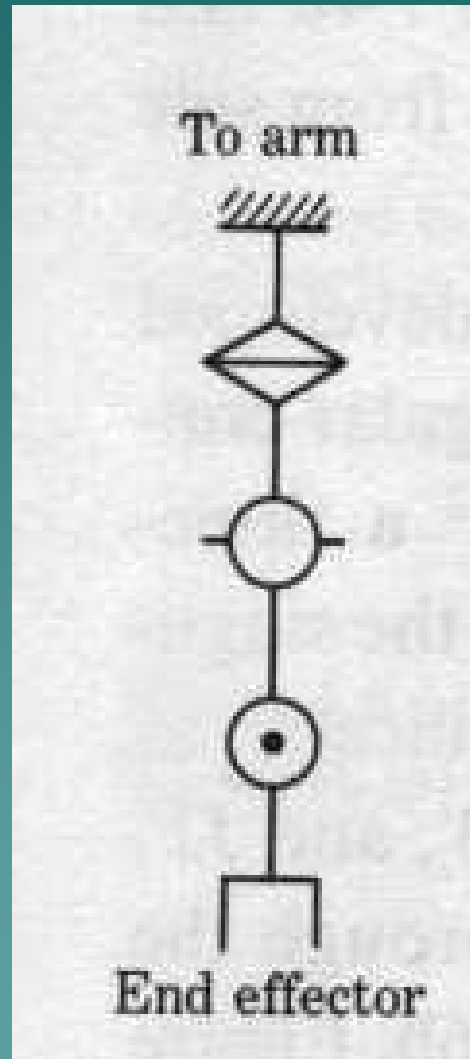
*j*<sub>2</sub>: Número de articulaciones de 2 grados de libertad.

(eliminando los enlaces redundantes).

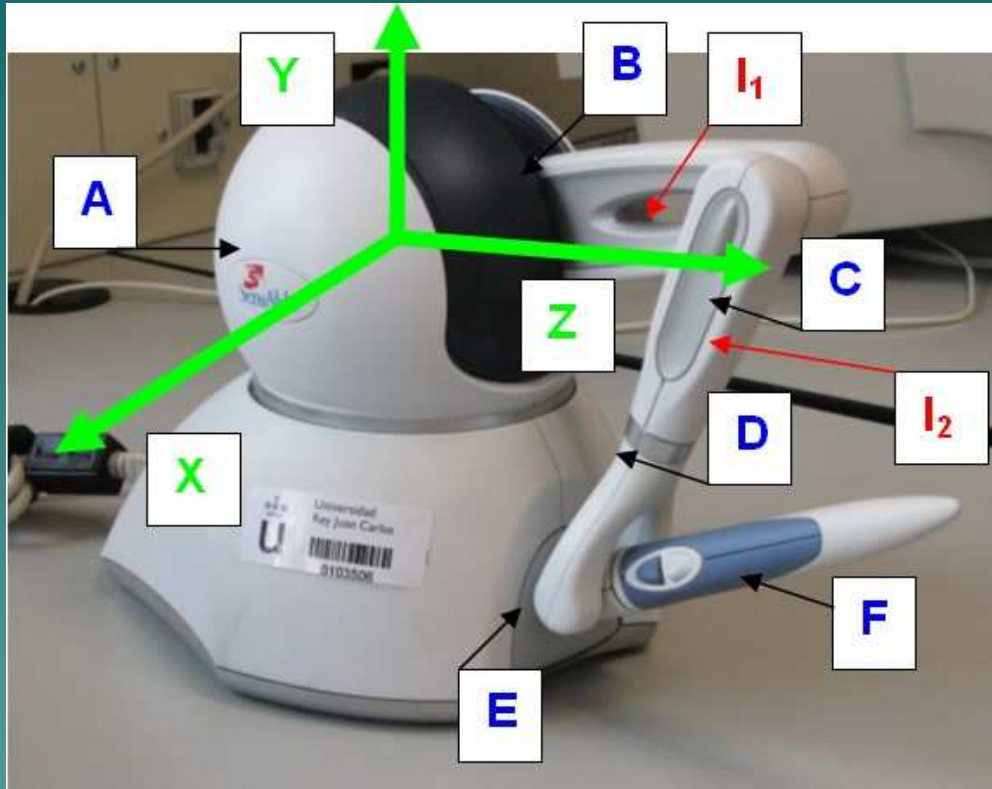
# Grados de libertad



# Grados de libertad



# Mecánica de hápticos: PHANToM OMNi



- ◆ A gira alrededor del eje Y definiendo el ángulo  $\theta_1$ . B gira alrededor del eje X definiendo el ángulo  $\theta_2$ . C gira alrededor del eje X' relativo definiendo el ángulo  $\theta_3$ .
- ◆ D, E y F son ejes ortogonales situados en el Elemento Final y son ángulos Gimbal que obviamos en este estudio.

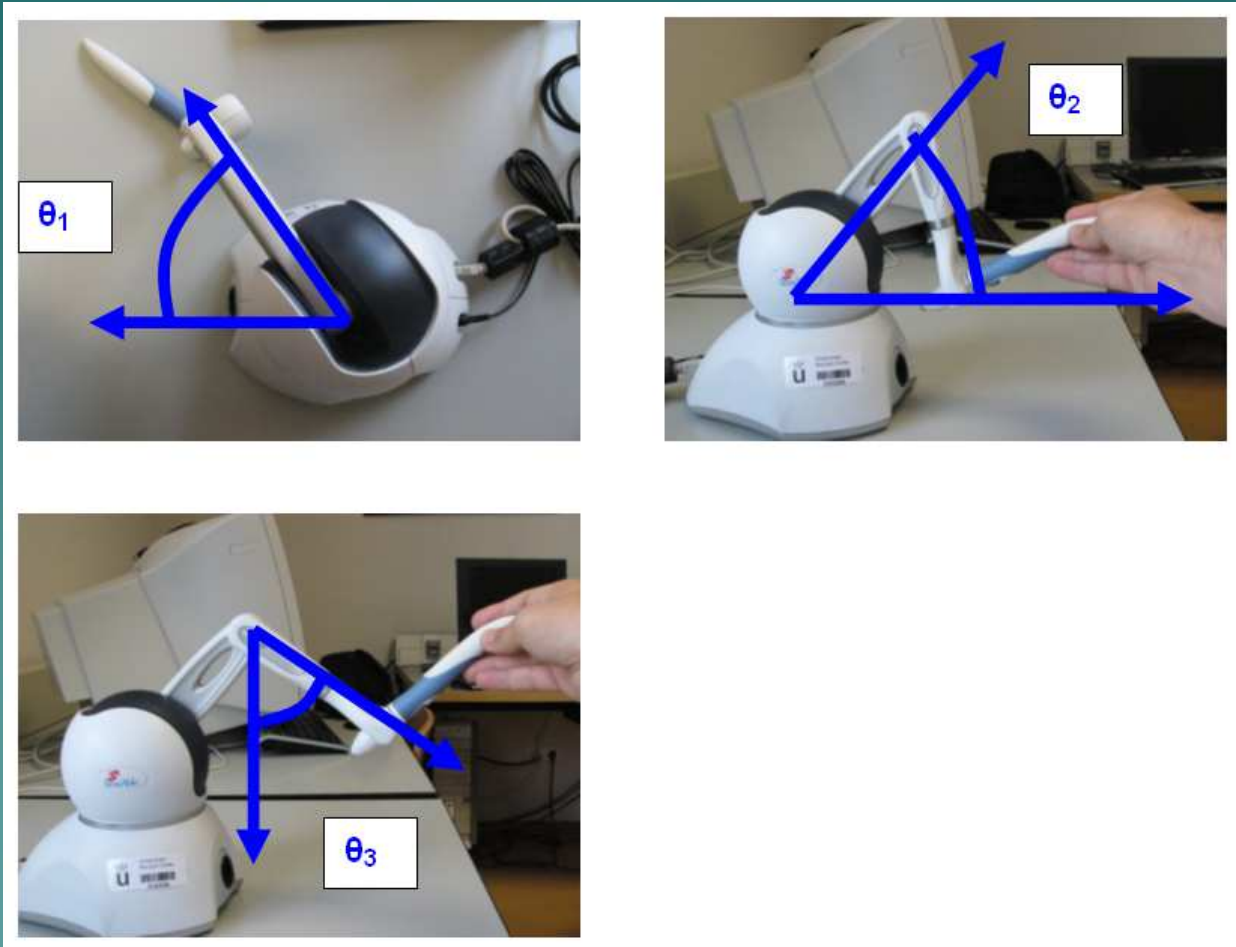
# Grados de libertad

- ◆ Un caso real: PHANToM OMNi.
  - Definimos los tres ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  obviando los tres ángulos gimbal, que determinan sólo la orientación del stylus.
  - Los ángulos  $\theta_2$  y  $\theta_3$  están determinados por las piezas B y C. El ángulo  $\theta_2$  indica la inclinación de la pieza B respecto a un plano horizontal XZ, mientras que  $\theta_3$  determina la inclinación de la pieza C respecto al eje vertical Y.

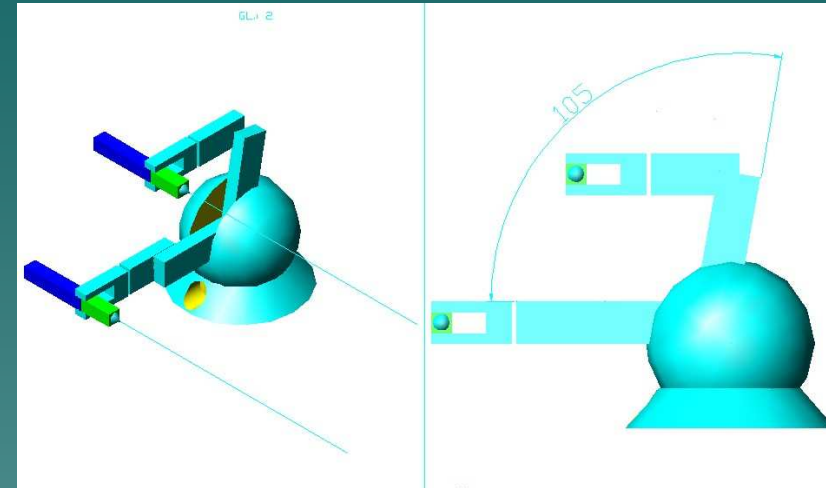
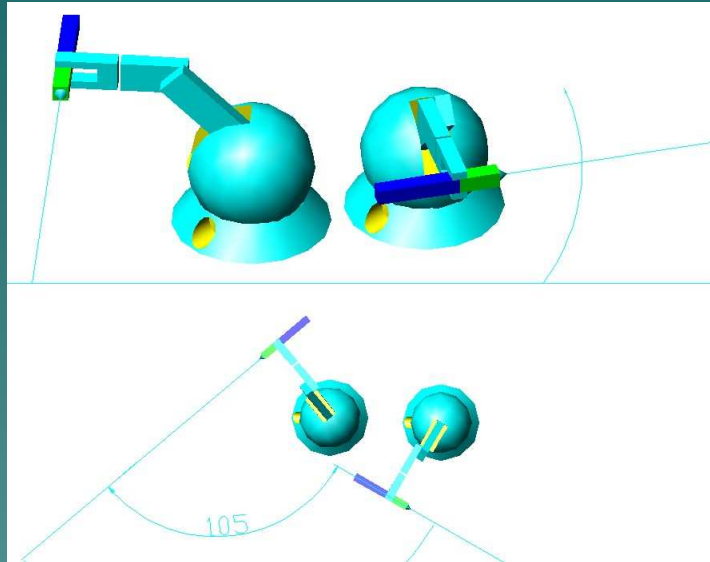
# Grados de libertad

- ◆ Un caso real: PHANToM OMNi.
  - Existe simetría cilíndrica cinemática de acuerdo a los diferentes valores del ángulo  $\theta_1$  [Yos90].
  - Debido al diseño mecánico del dispositivo el rango de  $\theta_3$  no es constante y depende del valor de  $\theta_2$  y del ángulo entre los brazos (I1-I2).

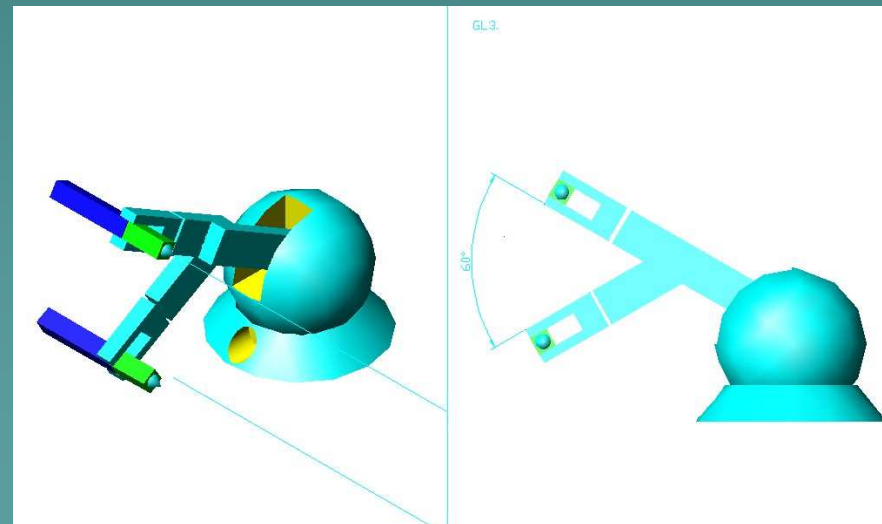
# Grados de libertad



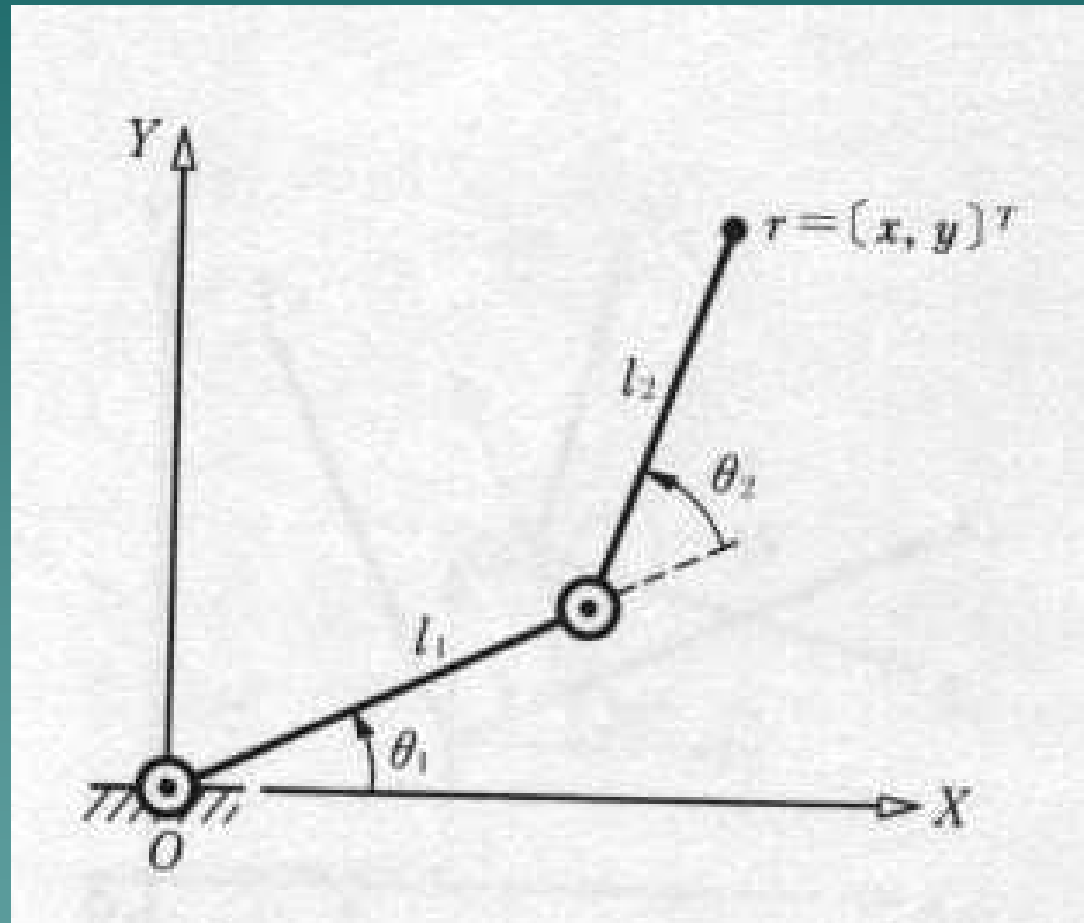
# Grados de libertad



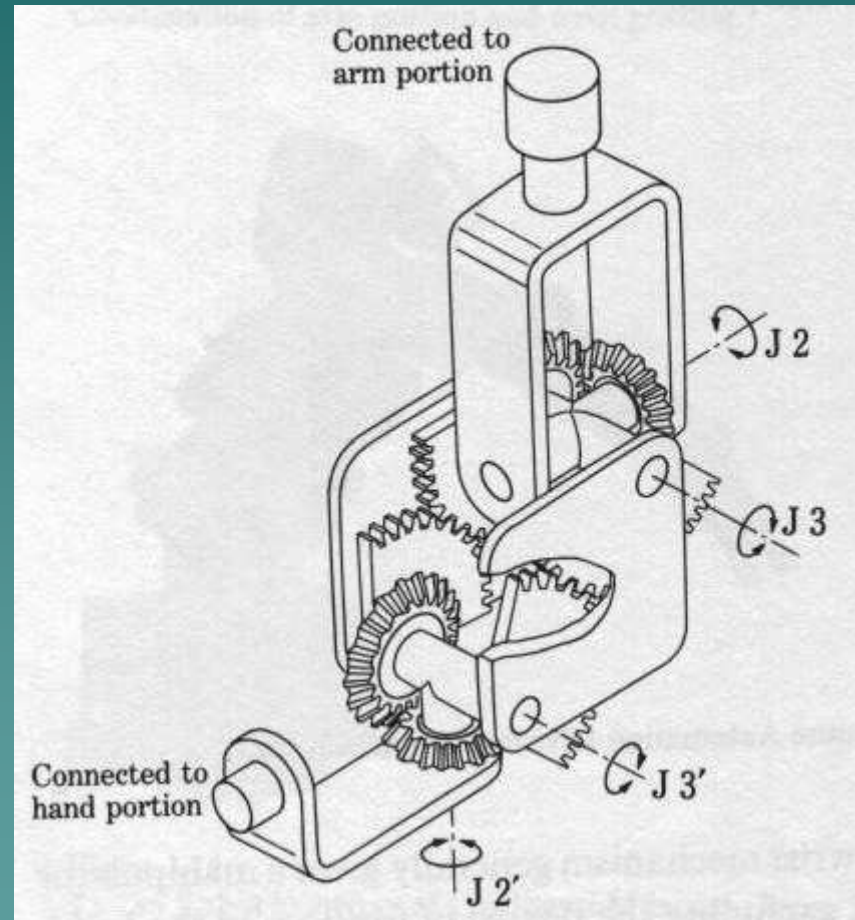
- ◆ Grados de Libertad con realimentación de fuerza



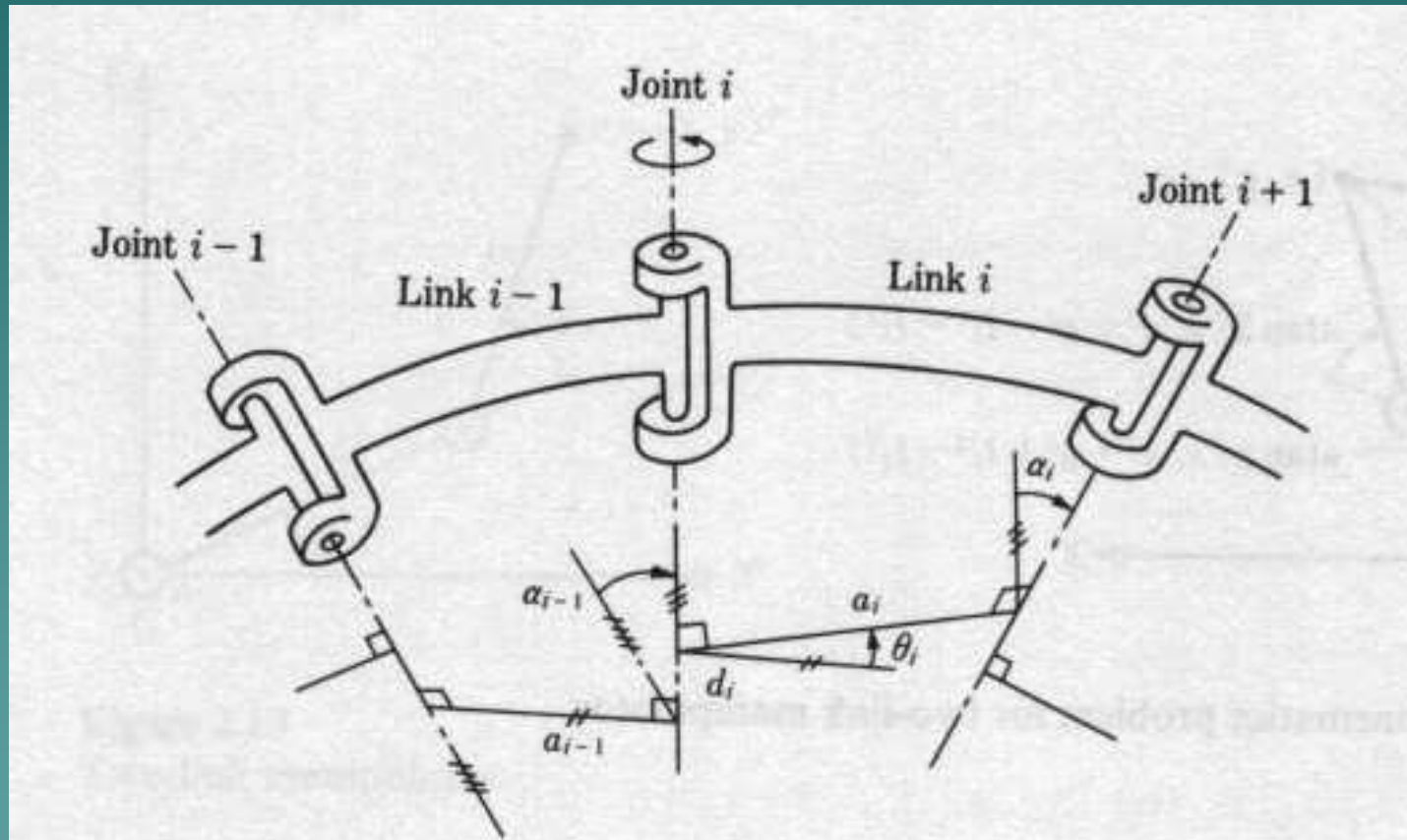
# Cadena cinemática



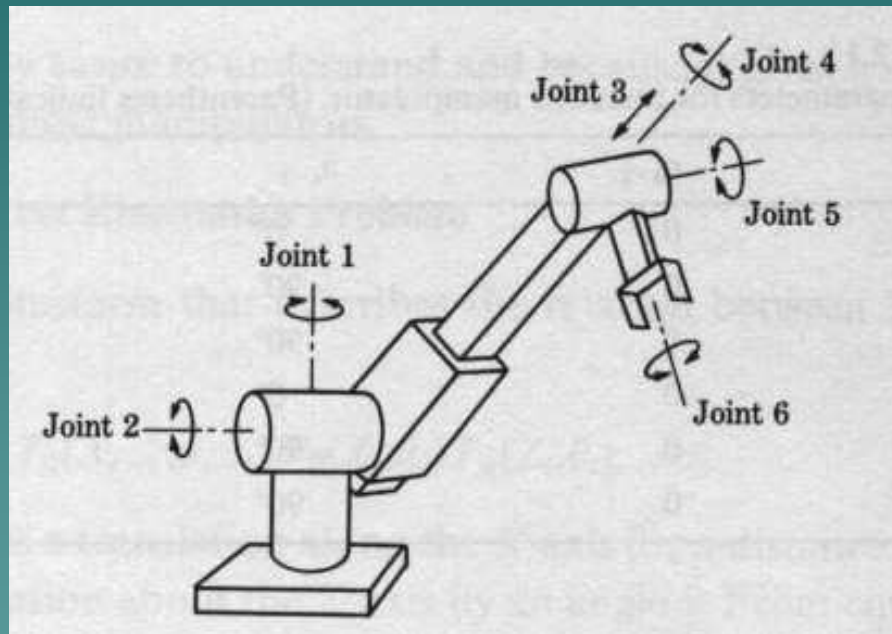
# Cadena cinemática



# Cadena cinemática



# Cadena cinemática



# Cinemática

Cinemática Directa (Manipulador tipo PUMA. ej. OMNi) [Cav02] [Cav01] [Rod05].

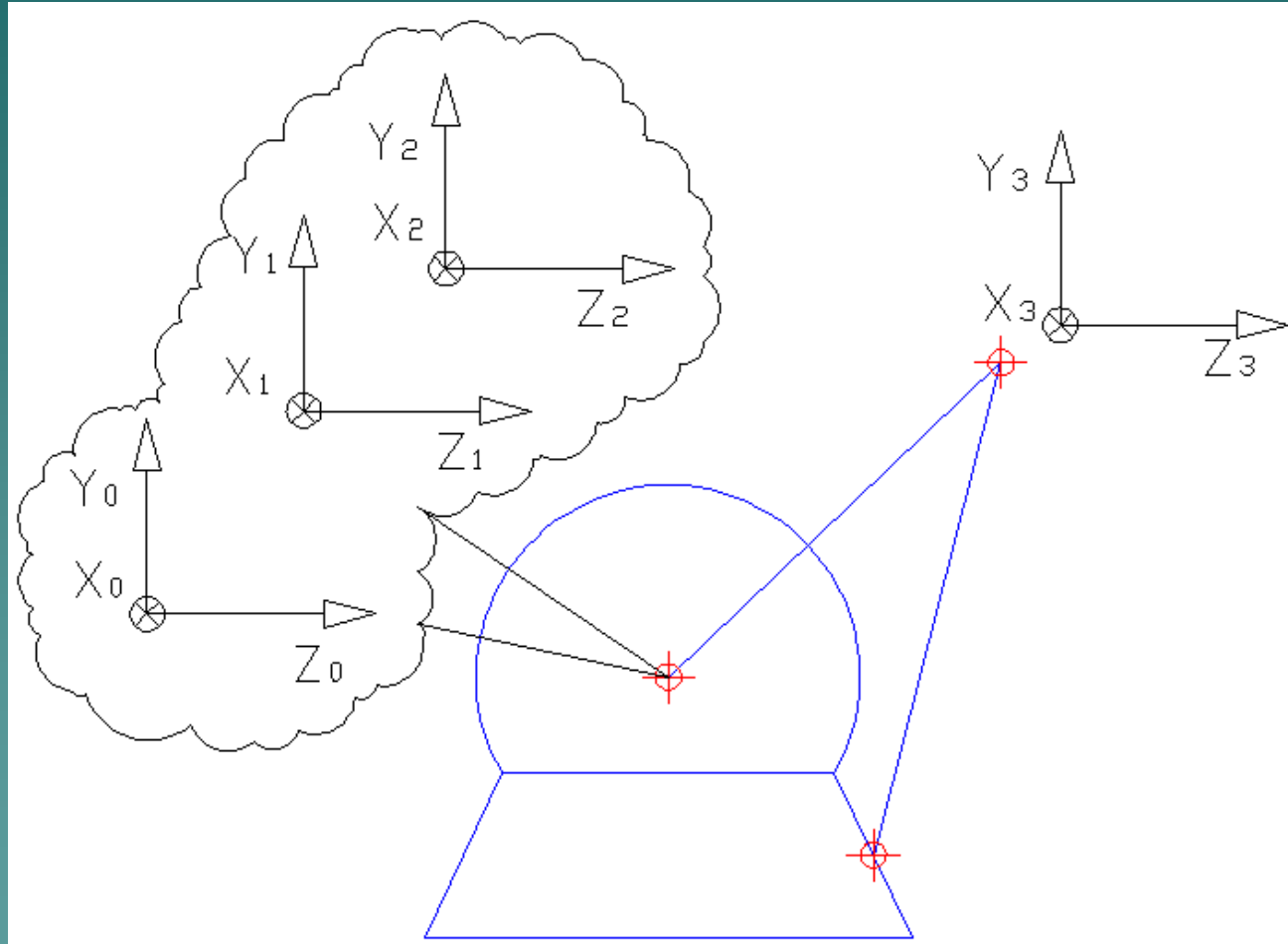
- ◆ El objetivo es calcular la matriz que define el comportamiento del dispositivo en función de cada uno de los ángulos de cada articulación  $\theta_i$ .
- ◆ La expresión de la posición del extremo del Manipulador en coordenadas cartesianas en función de los ángulos de las articulaciones  $\theta_i$  es:

$$(x, y, z) = F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

# Cinemática

- ◆ Se trata por tanto de definir la matriz de transformación  $T_{04}(\theta)$  del dispositivo desde CSO (centro del origen de coordenadas) hasta el extremo del manipulador.
- ◆ En nuestro caso el origen del CSO se encuentra en el centro del elemento A, punto donde se cortan los ejes de giro de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .
- ◆ Cuando esta matriz de transformación esté disponible la derivada parcial de  $T_{04}(\theta)$  respecto de  $\theta_{1,2,3}$  producirá la matriz Jacobiana.

# Sistemas de Referencia



# Cinemática

- ◆ Se realizar una secuencia de transformación desde el CS0 hasta el EE (End Effector-extremo del manipulador) atravesando la cadena de cinemática CS0-CS1-CS2-CS3-EE.
- ◆ CS1 es el sistema de coordenadas asociado al elemento A; CS2 es el sistema de coordenadas asociado al elemento B; CS3 es el sistema de coordenadas asociado al elemento C.

# Cinemática

- ◆ La matriz de transformación de CS0 a CS2 excluyendo el giro  $\theta_2$ .

$$T_{02} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ◆ Incluyendo  $\theta_2$  obtenemos la matriz de transformación entre CS2 y CS3

$$T_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & l_1 \sin(\theta_2) \\ 0 & -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & l_1 \cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Cinemática

- ◆ Por lo tanto la matriz de transformación de CS0 a CS3:

$$T_{03} = T_{02} T_{23}$$

- ◆ La traslación de la articulación CS3 a EE:

$$T_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Cinemática

- ◆ Por lo tanto la matriz de transformación de CS0 a CS4:

$$T_{04} = T_{03} T_{34}$$

- ◆ Por lo tanto la matriz de transformación del sistema es:

$$T_{04} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) & l_1 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) \\ 0 & \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & -l_2 \cos(\theta_3) + l_1 \sin(\theta_2) \\ -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \sin(\theta_3) & \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) & l_1 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Cinemática

Donde la Rotación y traslación corresponden con:

$$R_{04} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1)\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3)\sin(\theta_1) \\ 0 & \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_3) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_3) \end{pmatrix}$$

$$x = (l_1 \cos \theta_2 + l_2 \sin \theta_3) \sin \theta_1$$

$$y = l_1 \sin \theta_2 - l_2 \cos \theta_3$$

$$z = (l_1 \cos \theta_2 + l_2 \sin \theta_3) \cos \theta_1$$

# Cinemática

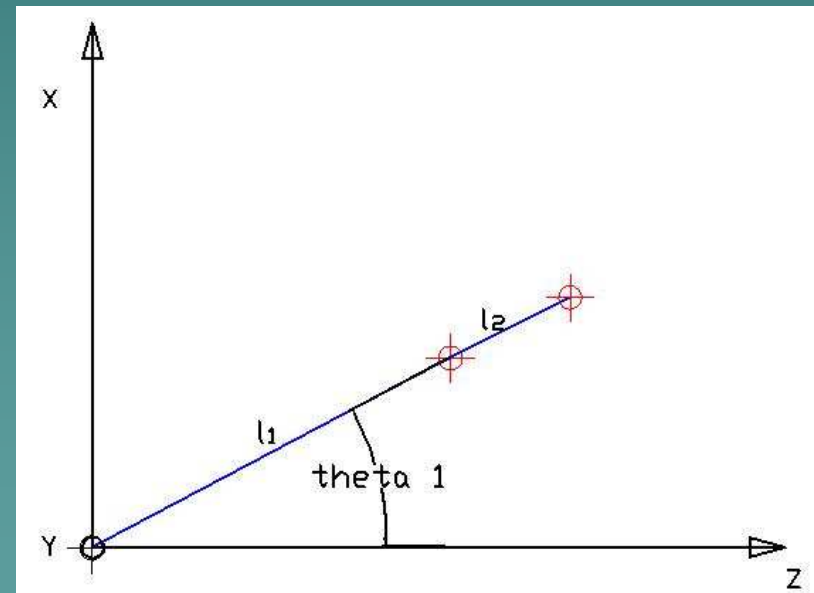
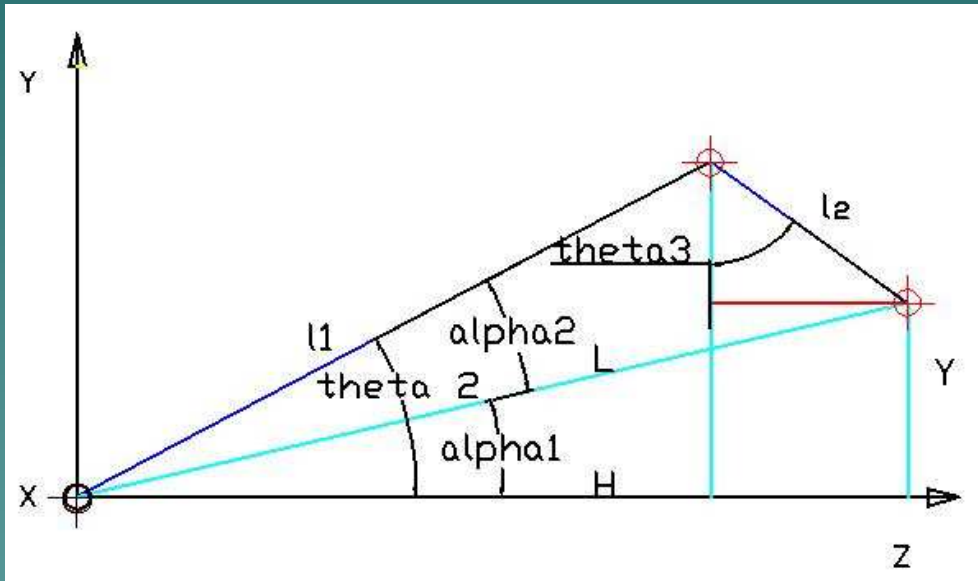
Cinemática Inversa (Manipulador tipo PUMA)  
[Cav02] [Cav01] [Rod05].

- ◆ Este estudio consiste en la expresión de los ángulos  $\theta_i$  de cada articulación en función de la posición del EE en coordenadas cartesianas:

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = I(x, y, z)$$

# Cinemática

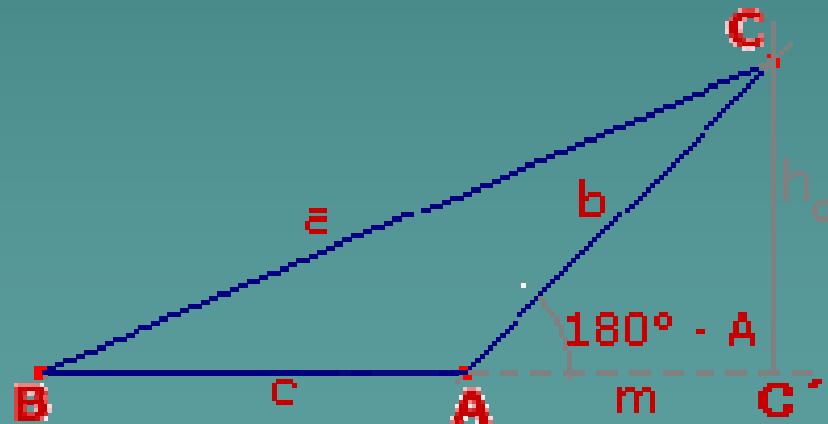
## Cinemática Inversa



# Cinemática

**Teorema del coseno** (cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido).

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 a c \cdot \cos (B)$$



# Cinemática

## Cinemática Inversa

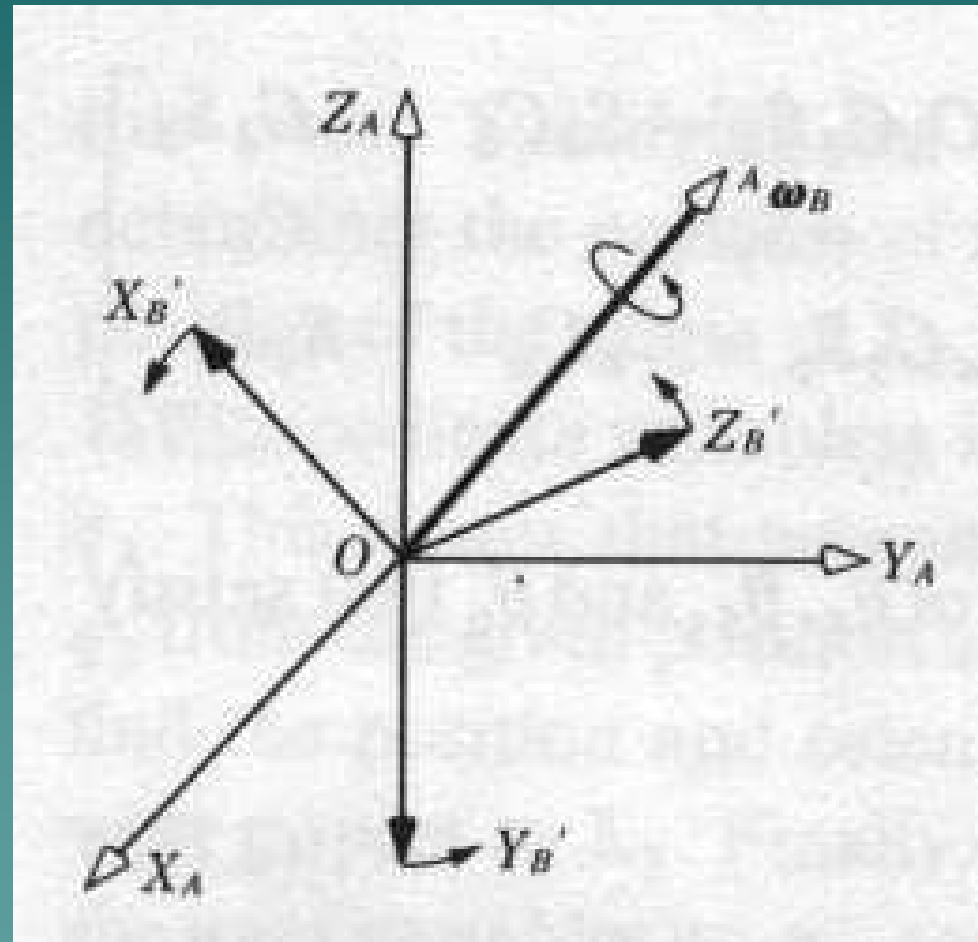
$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{x}{z}\right);$$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{y}{H}\right) + \arccos\left(\frac{L^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1L}\right)$$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{H - l_1 \cos \theta_2}{l_1 \sin \theta_2 - y}\right)$$

# Cinemática

Velocidad angular



# Matriz Jacobiana

Dada una función  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $m$  componentes  $y_1$  a  $y_m$  cada uno de ellos con  $n$  variables independientes  $x_1$  a  $x_n$ , el Jacobiano es la matriz de derivadas parciales de cada  $y_i$  respecto de cada una de las  $x_i$ .

$$J_F(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

generalizando

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{array}$$

# Matriz Jacobiana

- ◆ El Jacobiano es una matriz construida en dos partes. La mitad superior representa la relación que existe entre las velocidades lineales del extremo del manipulador con la velocidad angular de cada una de las articulaciones, simplificado en la ecuación:

$$V = J_u \cdot d\theta/dt$$

- ◆ La mitad inferior de la matriz representa la relación que existe entre la velocidad angular del extremo del manipulador con la velocidad angular de cada uno de las articulaciones:

$$\omega = J_l \cdot d\theta/dt$$

# Matriz Jacobiana

- La matriz Jacobiana es de gran ayuda en el análisis y el control del movimiento de un manipulador en cuanto a la determinación de configuraciones singulares.
- En las cercanías de un punto singular, para un pequeño cambio de posición sería necesario una energía (en fuerza o momento) muy elevada.
- En las cercanías de un punto singular existen configuraciones desde las cuales algunas direcciones son inalcanzables, por lo tanto el jacobiano nos indica zonas donde no estamos interesados que el dispositivo trabaje.

# Matriz Jacobiana

En el caso del manipulador tipo PUMA, la matriz superior del jacobiano  $J_u$  tiene la forma de  $J$  ( $3 \times n$ ) siendo  $n$  el número de grados de libertad y función de las  $\theta_i$ , es decir de todas las articulaciones que consideramos que son las que tienen realimentación de fuerza [Mur92]:

$$J = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\theta_2) + l_2 \sin(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & l_1 \cos(\theta_2 - \theta_3) & 0 \\ 0 & -l_1 \sin(\theta_2 - \theta_3) & l_2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Tensor de inercia

- Es un tensor simétrico que caracteriza la inercia a la rotación de un sólido rígido.
- Debe estar expresado en una base ortonormal, produciendo una matriz simétrica.
- Está compuesto de los momentos de inercia respecto a los tres ejes principales ( $xx$ ,  $yy$ ,  $zz$ ) más tres productos de inercia ( $xy$ ,  $yz$ ,  $xz$ ).

# Tensor de inercia

$$I_{xx} = \int_M d_x^2 dm = \int_V \rho(y^2 + z^2) dx dy dz$$
$$I_{yy} = \int_M d_y^2 dm = \int_V \rho(z^2 + x^2) dx dy dz$$
$$I_{zz} = \int_M d_z^2 dm = \int_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_M -xy dm = \int_V -\rho xy dx dy dz$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_M -yz dm = \int_V -\rho yz dx dy dz$$
$$I_{zx} = I_{xz} = \int_M -zx dm = \int_V -\rho zx dx dy dz$$

# Tensor de inercia

- Los elementos  $I_{ii}$  son los momentos de inercia respecto del eje  $i$ .
- Siendo el tensor de inercia simétrico, es siempre diagonalizable. Siempre se puede encontrar una base de vectores tal que dicha matriz tenga forma diagonal.
- Esa base de vectores definen los ejes principales. Normalmente el estudio de las simetrías del sólido nos permite definir esos ejes.

# Tensor de inercia

- Siendo la expresión de la energía cinética en la rotación:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

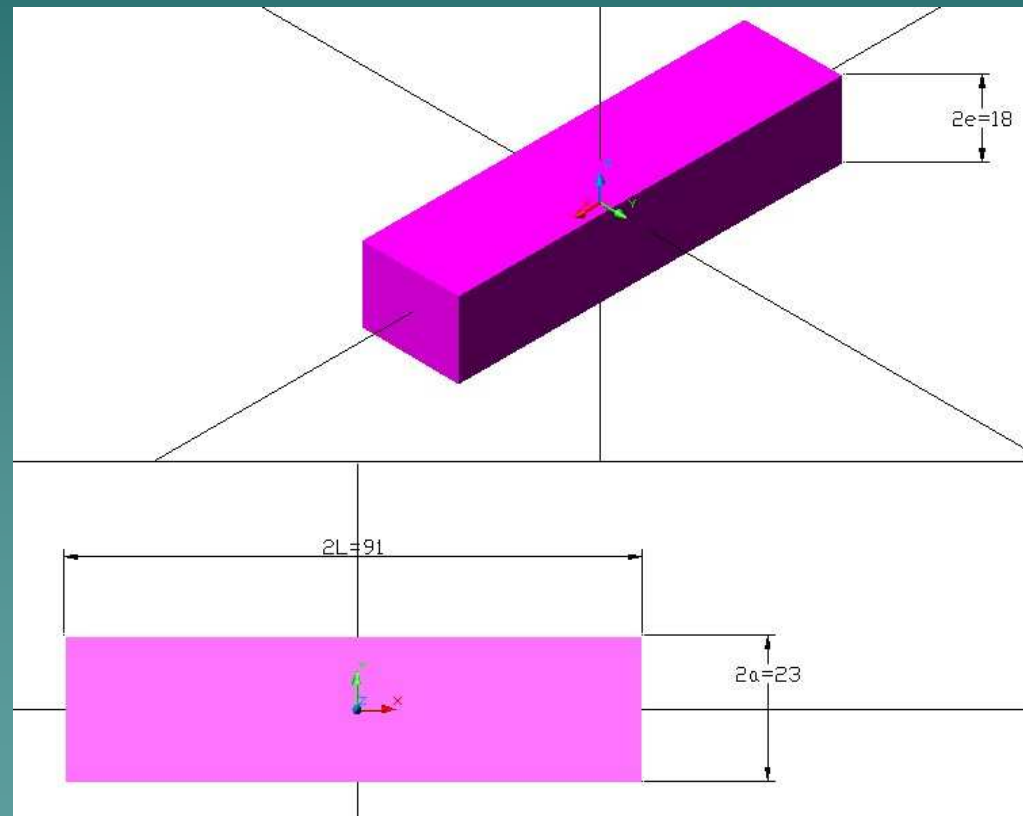
- Donde  $I$  es el momento de inercia del sólido y  $\omega$  la velocidad angular; la generalización a un tensor supone la siguiente expresión:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (\Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k I_{jk} \Omega_j \Omega_k$$

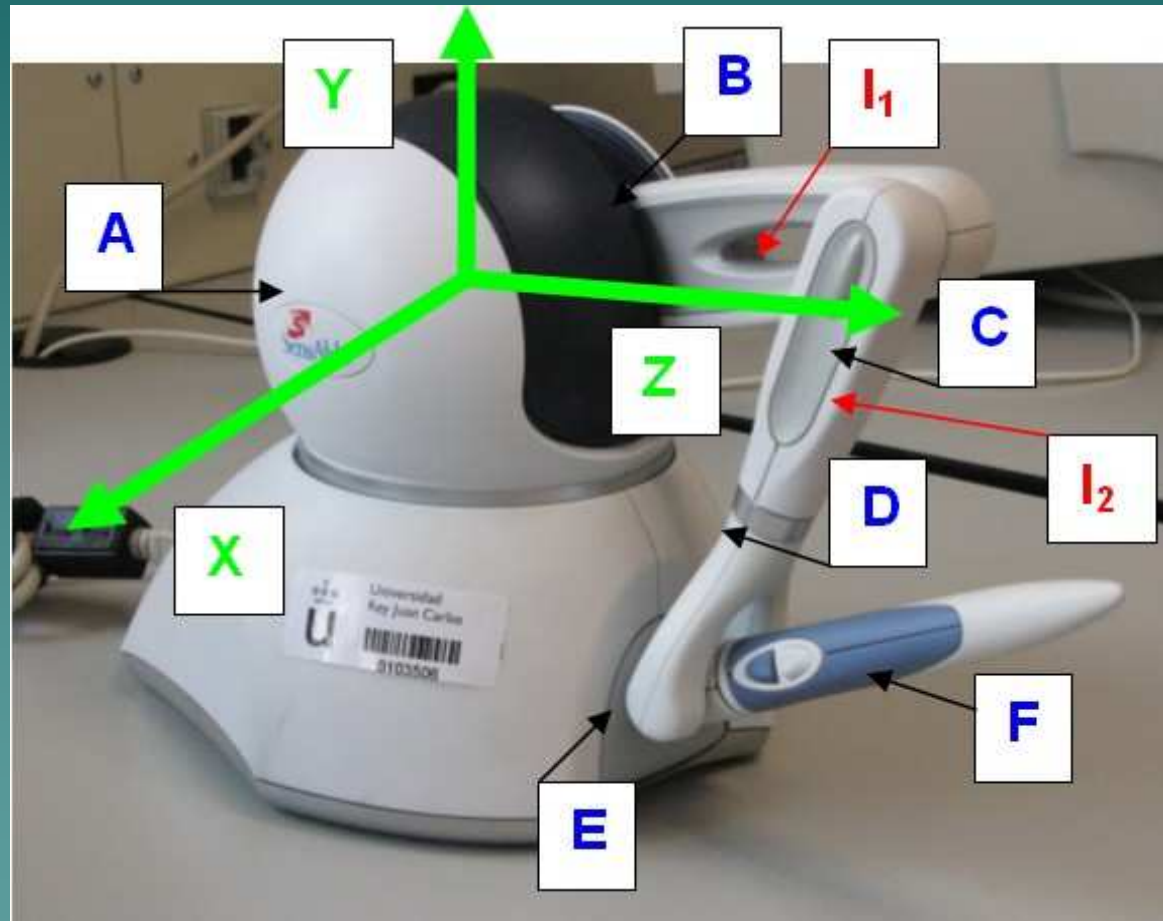
Que nos permitirá estudiar el comportamiento dinámico del sólido.

# Tensor de inercia

- Un ejemplo real: PHANToM OMNi (fig. elemento C)



# Tensor de inercia



# Tensor de inercia

**Pieza A:** Esfera hueca ideal de  $r=60\text{mm}$  y de espesor  $e=3,5\text{mm}$ .  
 $m_1 = 0,148911 \text{ Kg}$

**Pieza B:** Prisma rectangular ideal de dimensiones:  
 $2L=160\text{mm}$   
 $2a=32\text{mm}$  (se ha aproximado una anchura media)  
 $2e=18\text{mm}$   
 $m_2 = 0.2025216 \text{ Kg}$

**Pieza C:** Prisma rectangular ideal de dimensiones:  
 $2L=91\text{mm}$   
 $2a=23\text{mm}$  (se ha aproximado una anchura media)  
 $2e=18\text{mm}$   
 $m_3 = 0.0386159 \text{ Kg}$

Seleccionamos los ejes principales ortogonales al centro de masas y cortan las articulaciones.

# Tensor de inercia

- Momento de inercia de un paralelepípedo de lados  $2L$ ,  $2a$  y  $2e$

$$I_x = \frac{1}{3} m (a^2 + e^2)$$

$$I_y = \frac{1}{3} m (L^2 + e^2)$$

$$I_z = \frac{1}{3} m (a^2 + L^2)$$

- Para la pieza B ( $2L=160$ ,  $2a=32$ ,  $2e=18$ ) los valores serían:

$$I_x = \frac{1}{3} m_2 (a^2 + e^2) = 22.7499 \text{ Kgmm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} m_2 (L^2 + e^2) = 437.5142 \text{ Kgmm}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3} m_2 (a^2 + L^2) = 449.3279 \text{ Kgmm}^2$$

- Para la pieza C ( $2L=91$ ,  $2a=23$ ,  $2e=18$ ) los valores serían:

$$I_x = \frac{1}{3} m_3 (a^2 + e^2) = 2.7449 \text{ Kgmm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} m_3 (L^2 + e^2) = 27.6908 \text{ Kgmm}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3} m_3 (a^2 + L^2) = 28.3505 \text{ Kgmm}^2$$

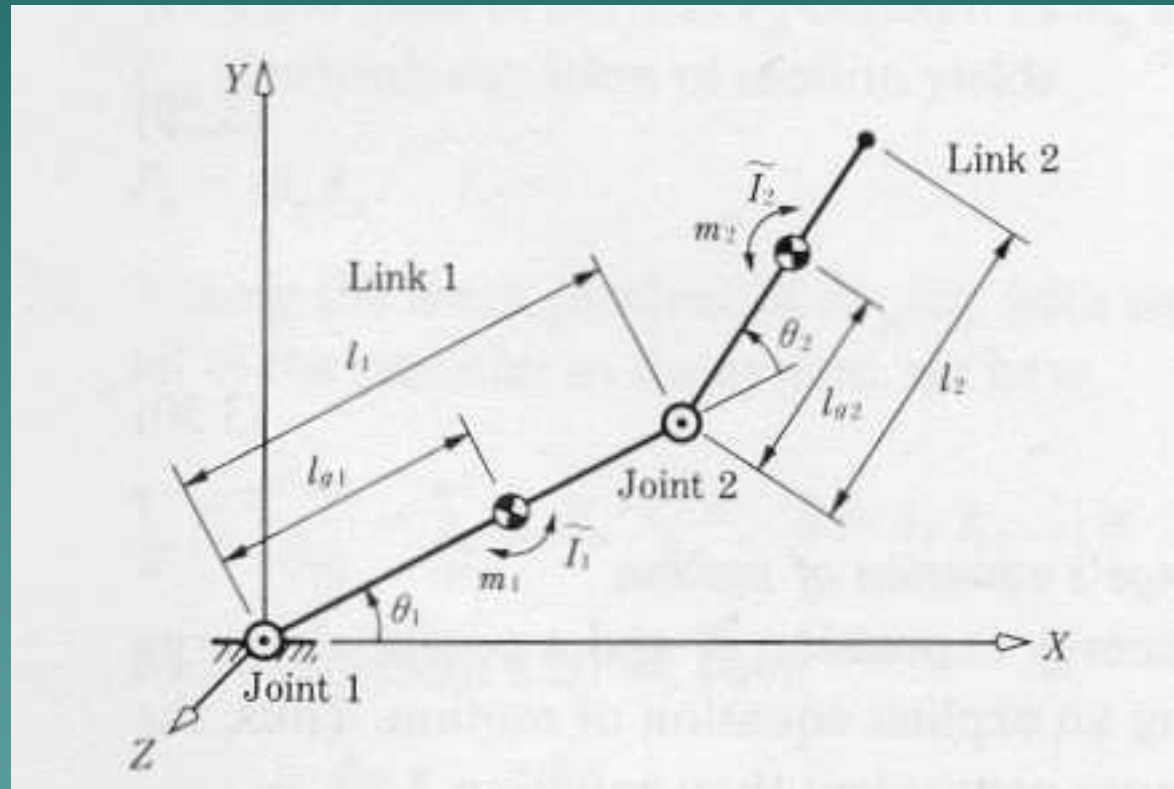
# Tensor de inercia

- Momento inercia de esfera hueca (espesor despreciable respecto a radio  $R=60$  mm),  $m_1=0,148911$

$$I_x=I_y=I_z= \frac{2}{3} m_1 * R^2 = \frac{2}{3} * 0,148911 * 60^2 = 357.3864 \text{ Kgmm}^2$$

- Que configuran los tensores de inercia (diagonales) de cada uno de los elementos del OMNi.

# Dinámica



# Dinámica

Siendo:

$\theta_i$  el ángulo de la articulación  $i$   
 $m_i$  la masa del eslabón  $i$   
 $I_i$  el momento de inercia del eslabón  $i$  (respecto al eje paralelo a  $Z$  que atraviesa el centro de masa)  
 $l_i$  la longitud del eslabón  $i$   
 $l_{gi}$  distancia entre el centro de masa del eslabón  $i$  y la articulación  $i$

# Dinámica

- Mecánica newtoniana.
- Mecánica de Lagrange (ecuaciones diferenciales).
- Ecuación de Lagrange del movimiento:

$$Q_{ib} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}.$$

- Siendo K la energía cinética del sólido rígido y P su energía potencial, y q la variable a estudiar (en nuestro caso  $\theta$  de la articulación).

# Dinámica

Definimos para cada una de las articulaciones la energía cinética y potencial:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 l_{g1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_1 \dot{\theta}_1^2,$$

$$P_1 = m_1 \hat{g} l_{g1} S_1,$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_2 \dot{s}_2^T \dot{s}_2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

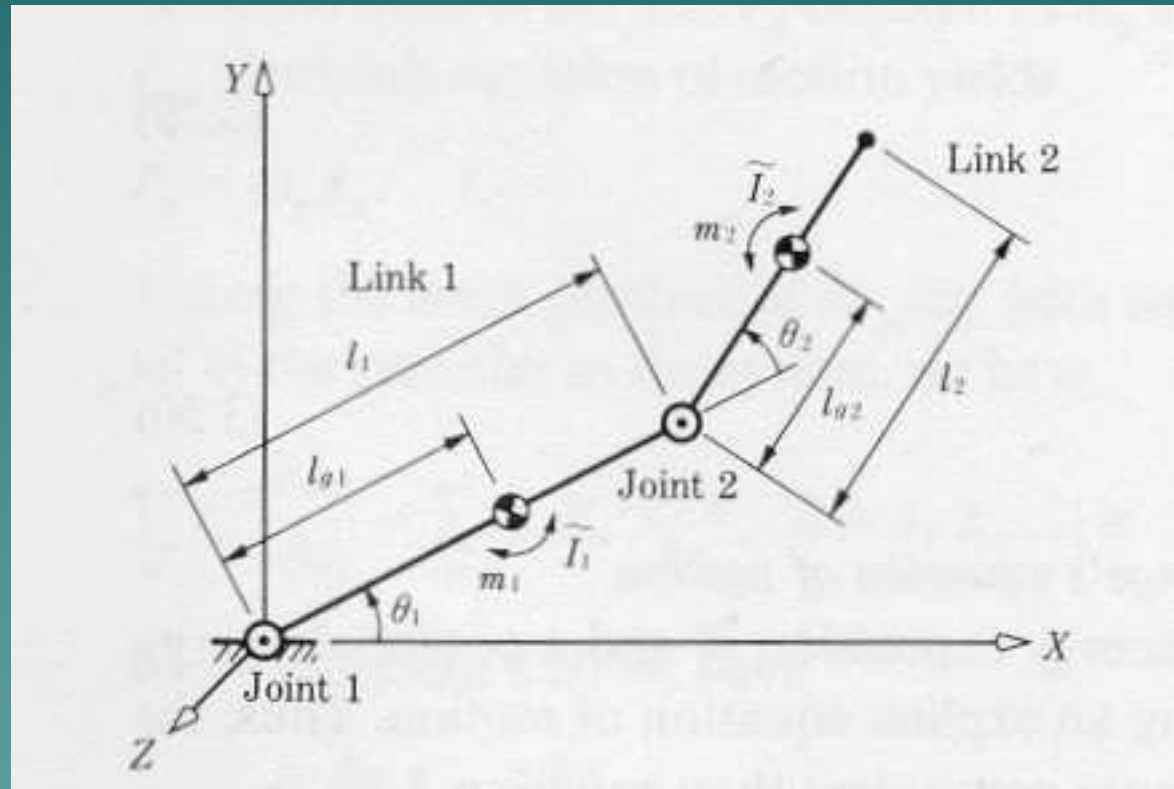
$$P_2 = m_2 \hat{g} (l_1 S_1 + l_{g2} S_{12}).$$

# Dinámica

Aplicando la mecánica basada en Lagrange, obtenemos la ecuación del movimiento para cada una de las articulaciones  $\theta_1$  y  $\theta_2$  (Momento o torque aplicado en cada articulación) a partir de la función  $L = K_1 + K_2 - P_1 - P_2$  [Yos90]:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= [m_1 l_{g1}^2 + \tilde{I}_1 + m_2(l_1^2 + l_{g2}^2 + 2l_1 l_{g2} C_2) + \tilde{I}_2] \ddot{\theta}_1 \\ &\quad + [m_2(l_{g2}^2 + l_1 l_{g2} C_2) + \tilde{I}_2] \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_{g2} S_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ &\quad + m_1 \hat{g} l_{g1} C_1 + m_2 \hat{g} (l_1 C_1 + l_{g2} C_{12}), \\ \tau_2 &= [m_2(l_{g2}^2 + l_1 l_{g2} C_2) + \tilde{I}_2] \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_{g2}^2 + \tilde{I}_2) \ddot{\theta}_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_{g2} S_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 \hat{g} l_{g2} C_{12}.\end{aligned}$$

# Dinámica



# Dinámica

También podemos expresar como:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= M_{11}\ddot{\theta}_1 + M_{12}\ddot{\theta}_2 + h_{122}\dot{\theta}_2^2 + 2h_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + g_1, \\ \tau_2 &= M_{21}\ddot{\theta}_1 + M_{22}\ddot{\theta}_2 + h_{211}\dot{\theta}_1^2 + g_2,\end{aligned}$$

# Dinámica

Donde cada término es:

$$M_{11} = m_1 l_{g1}^2 + \tilde{I}_1 + m_2 (l_1^2 + l_{g2}^2 + 2l_1 l_{g2} C_2) + \tilde{I}_2,$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 (l_{g2}^2 + l_1 l_{g2} C_2) + \tilde{I}_2,$$

$$M_{22} = m_2 l_{g2}^2 + \tilde{I}_2,$$

$$h_{122} = h_{112} = -h_{211} = -m_2 l_1 l_{g2} S_2,$$

$$g_1 = m_1 \hat{g} l_{g1} C_1 + m_2 \hat{g} (l_1 C_1 + l_{g2} C_{12}),$$

$$g_2 = m_2 \hat{g} l_{g2} C_{12}.$$

# Dinámica

La formulación forma matricial es inmediata:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}),$$

Siendo por tanto (término relativo a la inercia):

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

# Dinámica

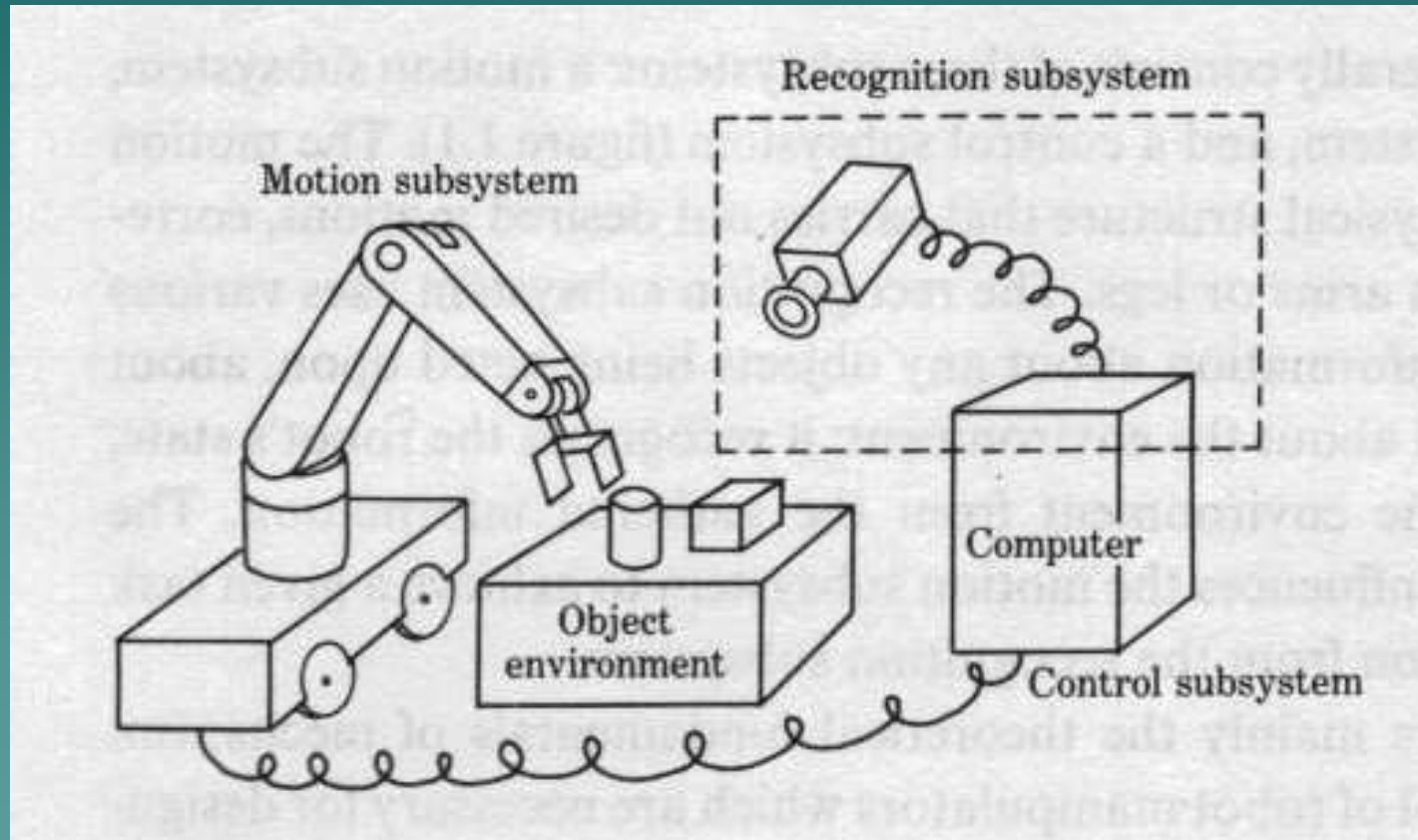
Y el resto de términos (centrífuga y Coriolis):

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \text{col} \left[ \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M_{ik}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \right],$$

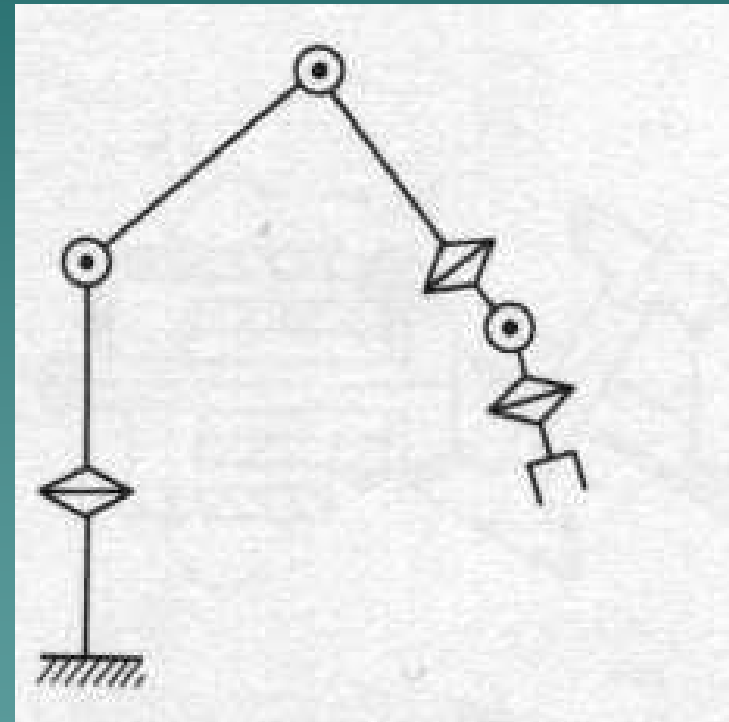
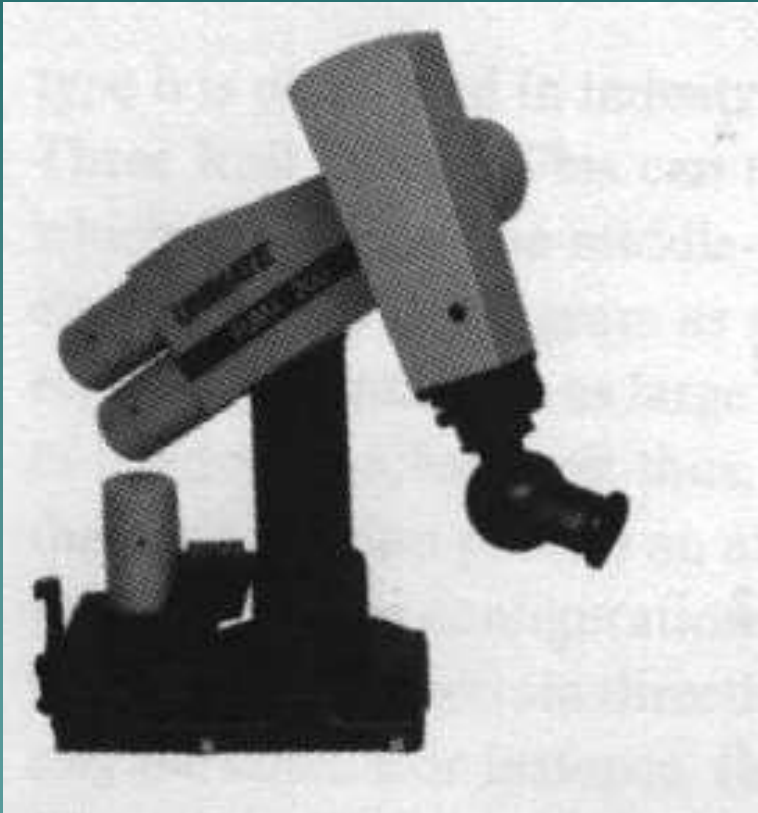
Y debido al efecto de la gravedad:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \text{col}[g_i],$$

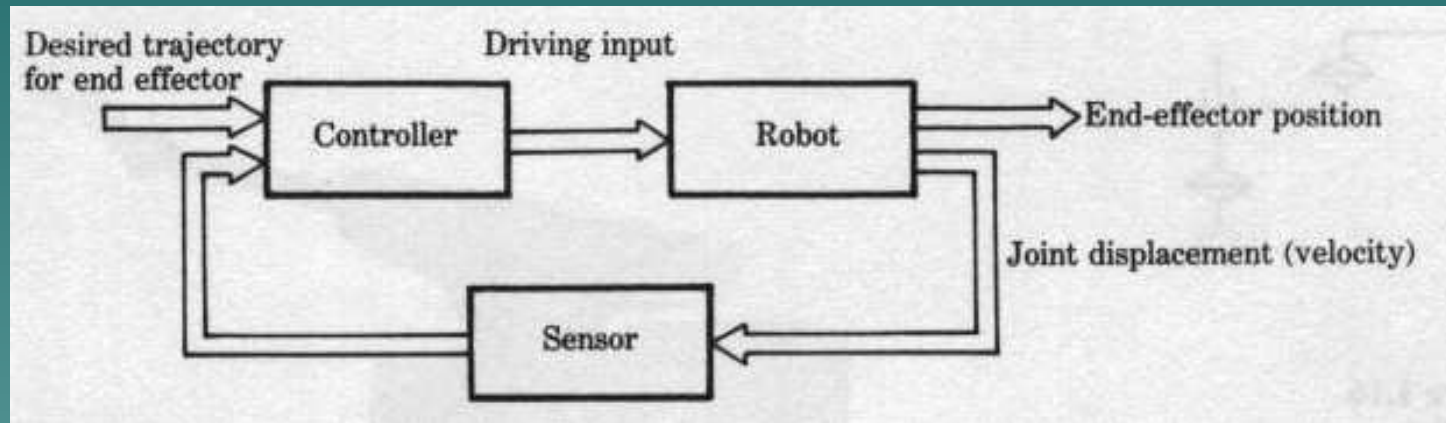
# Control de hápticos



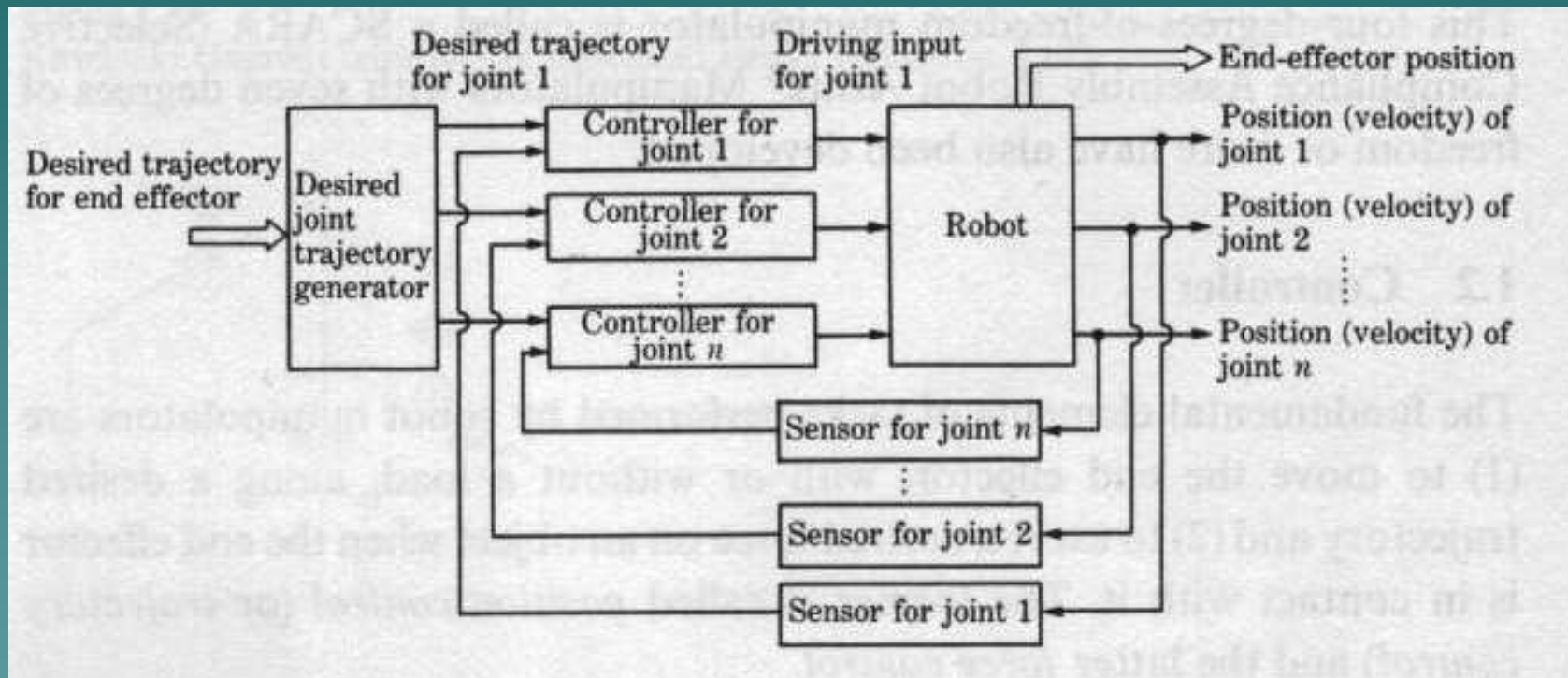
# Control de hápticos



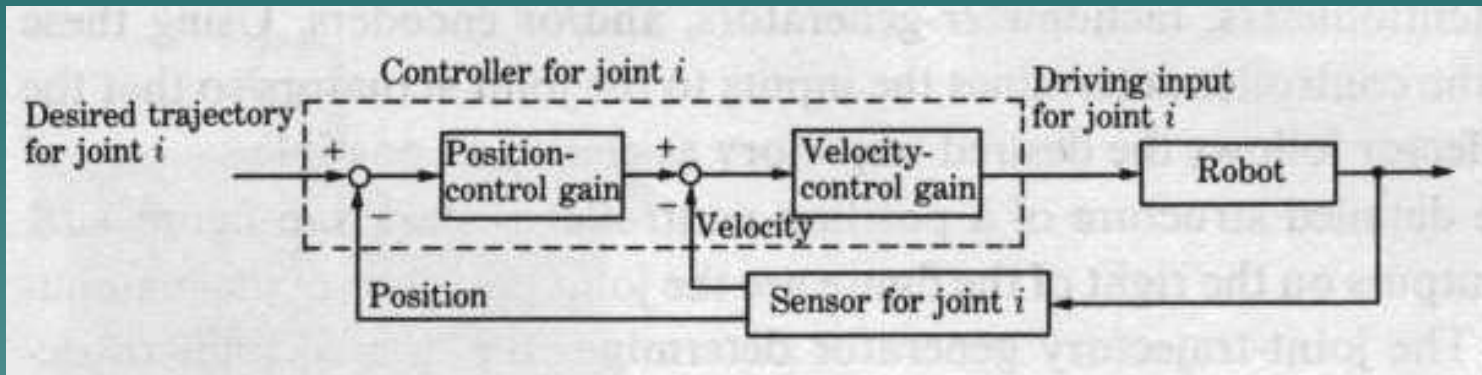
# Control de hápticos



# Control de hápticos



# Control de hápticos



# Bibliografía

- ◆ [Bar97] Barrientos, A., Peñín, L., Balaguer, C., Aracil, R. Fundamentos de Robótica. Mc Graw Hill. 1997.
- ◆ [Yos90] Yoshikawa, T.; Foundations of Robotics: Analysis and Control. Cambridge, MA: MIT Press, 1990.
- ◆ [Cav01] Cavusoglu, M. C., & Feygin, D. (2001). *Kinematics and dynamics of PHANToM(TM) model 1.5 haptic interface*. (Tech. Rep.). University of California at Berkeley, Electronics Research Laboratory Memo M01/15.
- ◆ [Cav02] Cavusoglu, M. C., & Feygin, D. and Tendick F. A Critical Study of the Mechanical and Electrical Properties of the PHANToM Haptic Interface and Improvements for High Performance Control. *Teleoperators and Virtual Environments*, 11(6):555--568, 2002.
- ◆ [Rod05]Rodriguez, A., Basañez, L. (2005). Modelo cinemático de la interface háptica PHANToM Premium 1.5/6DOF. (Tech. Rep.). Universidad Politecnica de Cataluña. Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales.
- ◆ [Mur92] Murray, R. M., Li, Z., & Sastry, S. S. (1994). A mathematical introduction to robotic manipulation. CRC Press, Inc. Boca Raton, FL.