Sólido Rígido

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
27 de Septiembre de 2010

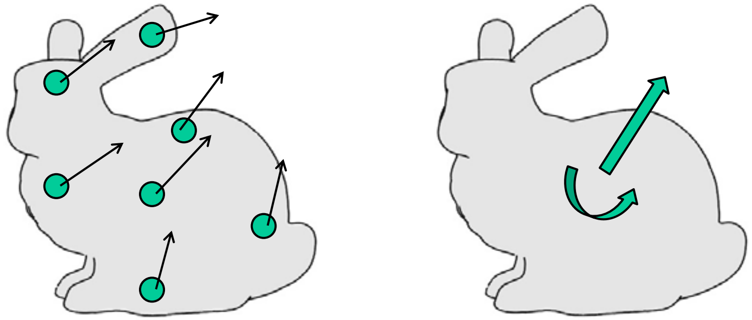
Vídeo Juegos

Batman: Arkham Asylum (nVidia Physx)

Índice

- Cinemática
  - Traslación, rotación
  - Velocidad lineal, velocidad angular
- Dinámica
  - Conservación del momento, 2 ley de Newton
  - Masa, inercia, momento angular, par/torque
- Implementación
  - Integración
  - Impacto
  - Rotación – detalles
  - Cuaterniones
  - Librerías

Grados de Libertad
Sólido Deformable Vs. Sólido Rígido

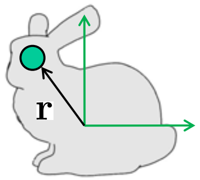


Deformable:
- Fuerzas entre partículas → Deformación
- Discretización: n partículas
- 3n grados de libertad

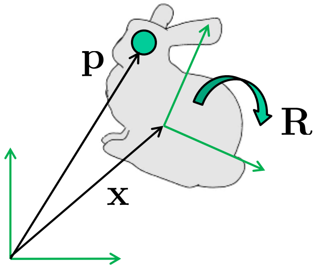
Rígido:
- Fuerzas entre partículas → Deformación inapreciable
- Discretización: traslación y rotación
- 6 grados de libertad

Traslación y Rotación

Sistema local



Sistema global



$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{r}$$

Posición del punto en coordenadas globales

Posición del centro de masas

Matriz de rotación

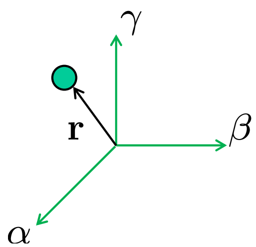
Posición del punto en coordenadas locales

Rotación: Opciones

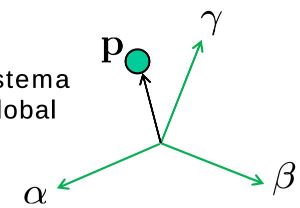
- La rotación tiene 3 grados de libertad, pero no hay una opción estándar para describirla:
  - Ángulos de Euler. 3 valores, pero difícil de operar.
  - Matriz de rotación. 9 valores.
  - Cuaternión (quaternion). 4 valores.
  - Teoría de tornillos (screw motion).
  - ...

Matriz de Rotación

Sistema local



Sistema global



$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{r}$ ¿Pero cómo calculamos la rotación $\mathbf{R}$?

$$\mathbf{p} = r_x\alpha + r_y\beta + r_z\gamma = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)\,\mathbf{r}$$

$$\mathbf{R} = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{pmatrix}$$

Matriz de Rotación

- Propiedades:
  - Sus columnas son los ejes rotados
  - Determinante unidad $\mathtt{det}(\mathbf{R}) = 1$
  - Ortonormal

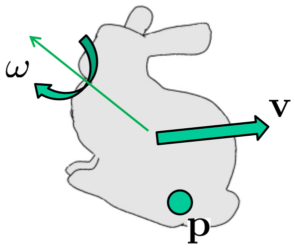
$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

Velocidad

- Velocidad lineal $\mathbf{v}$
- Velocidad angular ω
  - Módulo: velocidad de giro (rad/s)
  - Dirección: vector alrededor del cual se gira
- Velocidad de un punto:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} + \omega \times (\mathbf{R}\underset{\uparrow}{\mathbf{r}})$$

Coordenadas locales del punto $\mathbf{p}$



Velocidad Vs. Derivada del Estado

- Velocidad lineal = derivada de la posición del centro de masas $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$
- La velocidad angular NO es la derivada de la matriz de rotación

$$\mathbf{R} = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \left(\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}\right) = (\omega \times \alpha \quad \omega \times \beta \quad \omega \times \gamma)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \omega^* \mathbf{R} \qquad \omega^* = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

El producto vectorial es una transformación lineal, por lo que se puede representar como una matriz

Dinámica de una Partícula

- 2 Ley de Newton: $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$

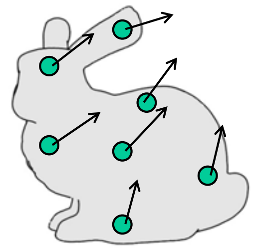
  Momento Lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

- Conservación del Momento Lineal:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

  - En ausencia de fuerzas, el momento lineal no cambia.
  - La 2 ley de Newton es un caso particular de la conservación del momento lineal, para masa constante.

Conservación del Momento
Aplicación al Sólido Rígido



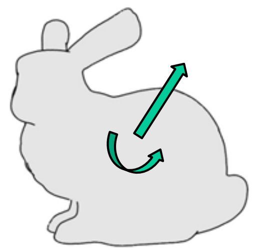
Sistema de partículas

- Para una partícula:

$$\mathrm{d}\mathbf{p} = dm\mathbf{v}$$

- Para todo el sistema:

$$\int \dot{\mathbf{v}} dm = \int \mathrm{d}\mathbf{F}$$



Sólido rígido

- Velocidad del sólido rígido:

$$\mathbf{v}, \omega$$

- Ecuaciones dinámicas:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \qquad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{T}$$

Se reescribe la ley de conservación del momento para el sistema de partículas, pero utilizando las velocidades de sólido rígido

Dinámica del Sólido Rígido

- Traslación:

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

Variación del momento lineal — Masa total del sólido — Aceleración del centro de masas — Fuerza total sobre el sólido

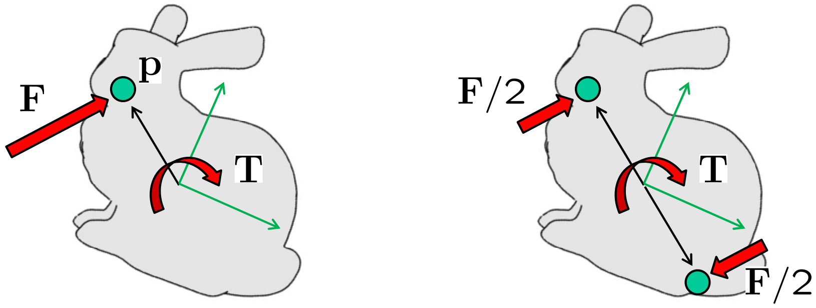
- Rotación:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{T}$$

Variación del momento angular — Par/torque total sobre el sólido

Par / Torque

- "Fuerza" aplicada fuera del centro de masas, y que hace girar
- Se puede interpretar como dos fuerzas de igual magnitud pero contrapuestas



$$\mathbf{T} = (\mathbf{Rr}) \times \mathbf{F}$$

Coordenadas locales del punto $\mathbf{p}$

Momento Angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}\omega$$

Momento angular — Tensor de inercia — Velocidad angular

- Mide la velocidad a la que gira la masa; tiene en cuenta la distribución de masa en el objeto

Masa e Inercia

- Centro de masas:
  - La gravedad de las partículas produce un par.
  - Hallar un punto que, al aplicar en él la masa total, el par sea el mismo.

$$\mathbf{x} = \frac{\int \mathbf{r}\rho dV}{\int \rho dV}$$

Integral sobre el volumen

Densidad

Masa e Inercia

- Tensor de inercia
  - Representa la distribución de masa en el objeto; resistencia a acelerar con respecto a varios ejes.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = -\int \rho \mathbf{r}^* \mathbf{r}^* dV$$

$$M_{xx} = \int \rho(y^2 + z^2)dV$$
$$M_{yy} = \int \rho(x^2 + z^2)dV$$
$$M_{zz} = \int \rho(y^2 + z^2)dV$$
$$M_{xy} = M_{yx} = \int -\rho xy dV$$
$$M_{xz} = M_{zx} = \int -\rho xz dV$$
$$M_{yz} = M_{zy} = \int -\rho yz dV$$

Rotación e Inercia

- Al variar la rotación del objeto, varía su tensor de inercia.
- Pero se puede calcular de manera sencilla conociendo la rotación:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}\mathbf{M}_0\mathbf{R}^T$$

Tensor de inercia en coordenadas locales

- Incluso la inversa es sencilla:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{R}^T$$

Ecuaciones de Newton-Euler

- Traslación:

$$\boxed{m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}}$$

- Rotación:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\mathbf{M}\omega)}{dt} = \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{M}\dot{\omega} = \mathbf{T} - \omega \times (\mathbf{M}\omega)}$$

  - Aquí se aprecia la influencia de la variación de la inercia.
  - No conviene implementar esta ecuación.

Integración Numérica

- Euler explícito (modificado):
  1. Sumar fuerzas $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i \quad \mathbf{T} = \sum (\mathbf{R}\mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{T}_j$
  2. Integrar traslación $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{v} + \frac{\Delta t}{m}\mathbf{F} \quad \mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \Delta t \mathbf{v}$
  3. Integrar momento angular $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{L} + \Delta t \mathbf{T}$
  4. Calcular velocidad angular $\omega = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$ aprox.
  5. Integrar rotación $\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} + \Delta t \omega^* \mathbf{R}$
  6. Reparar rotación
  7. Calcular momento de inercia $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{M}_0^{-1}\mathbf{R}^T$

Integración Numérica

- Para un sólido rígido en movimiento libre, suele ser suficiente con Euler explícito.
- Puede que necesitemos Euler implícito si tenemos muelles muy rígidos.
- Los cuerpos alargados tienen poca inercia alrededor del eje principal, y también dan más problemas en la integración explícita.

Ortonormalización de la Rotación

- Al integrar la rotación, deja de ser ortonormal.
- Algoritmo de ortonormalización (p.ej. Gram-Schmidt).

$$\mathbf{R} = (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$$

$$\alpha \leftarrow \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$$

$$\beta \leftarrow \beta - (\beta^T \alpha)\alpha$$

$$\beta \leftarrow \frac{\beta}{\|\beta\|}$$

$$\gamma \leftarrow \alpha \times \beta$$

Cuaterniones

- Definición del cuaternión mediante vector y ángulo

$$\mathbf{q} = (x \quad y \quad z \quad s) \qquad (x \quad y \quad z) = \sin(\theta/2)\boxed{\mathbf{u}} \qquad s = \cos(\boxed{\theta}/2)$$

Eje de rotación

Ángulo

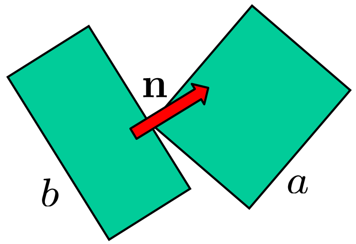
- La rotación de un vector se puede expresar mediante un producto de cuaterniones.
- Ventajas: utilizando cuaterniones es sencillo interpolar rotaciones.
- Derivada de la rotación usando cuaterniones

$$\dot{\mathbf{q}} = 1/2\boxed{(\omega \quad 0)}\boxed{\circ}\mathbf{q}$$

Cuaternión formado por la velocidad angular y s=0

Producto de cuaterniones

Impacto (Sin Fricción)



- Impulso (instantáneo):

$$\mathbf{j}_a = j\mathbf{n} \qquad \mathbf{j}_b = -j\mathbf{n}$$

- Variación del momento:

$$m_a\mathbf{v}_a = m_a\mathbf{v}_{a,0} + j\mathbf{n} \qquad \mathbf{M}_a\omega_a = \mathbf{M}_a\omega_{a,0} + (\mathbf{R}_a\mathbf{r}_a) \times (j\mathbf{n})$$

$$m_b\mathbf{v}_b = m_b\mathbf{v}_{b,0} - j\mathbf{n} \qquad \mathbf{M}_b\omega_b = \mathbf{M}_b\omega_{b,0} - (\mathbf{R}_b\mathbf{r}_b) \times (j\mathbf{n})$$

- Coeficiente de restitución:

$$\mathbf{n}^T\mathbf{v}_{rel} = -\epsilon\mathbf{n}^T\mathbf{v}_{rel,0}$$

- Juntándolo todo:

$$j = \frac{-(1+\epsilon)\mathbf{n}^T\mathbf{v}_{rel,0}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\mathbf{n}^T\left(\mathbf{M}_a^{-1}((\mathbf{R}_a\mathbf{r}_a)\times\mathbf{n})\right)\times(\mathbf{R}_a\mathbf{r}_a)+\mathbf{n}^T\left(\mathbf{M}_b^{-1}((\mathbf{R}_b\mathbf{r}_b)\times\mathbf{n})\right)\times(\mathbf{R}_b\mathbf{r}_b)}$$

Fricción

- Ley de Coulomb:
  - La fuerza de fricción (tangencial) será mayor a mayor fuerza normal.
  - Pero ha de ser disipativa. Es decir, tiene un máximo, y nunca cambiará el sentido de la velocidad tangencial.

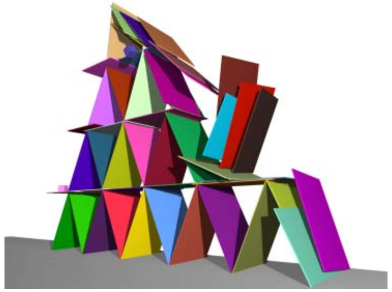
Impulso tangencial máximo: $j_{\mathbf{t},\mathrm{max}} = \mu j_{\mathbf{n}}$

Velocidad relativa tangencial: $\mathbf{v}_{rel,\mathbf{t}}$

- Si al aplicar el impulso tangencial máximo, la velocidad relativa no cambia de sentido, se aplica dicho impulso.
- Si la velocidad cambia de sentido, entonces se aplica el impulso tal que cancela la velocidad tangencial.

Investigación Sólido Rígido

- Algoritmos de resolución de contacto entre pilas de sólidos
- Control de trayectorias (*animación dirigible*)



Referencias

- Notas de Baraff y Witkin
- Libro de Erleben
- ‘Dynamics of Multibody Systems’, Shabana.
- ‘Fast and accurate computationa of polyhedral mass properties’, Journal of Graphics Tools. B. Mirtich.
- Librerías: Bullet, ODE, Havok, nVidia Physx...