Restricciones (Constraints)

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
4 de Octubre de 2010

Índice

Concepto de Restricción

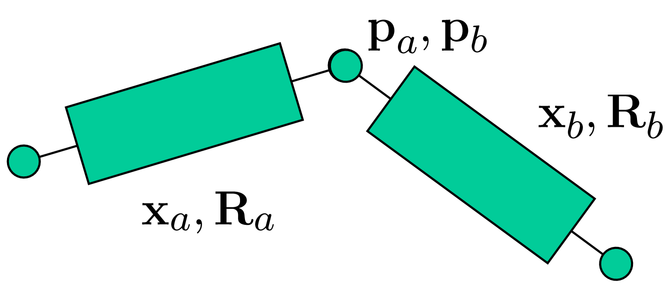
- Una propiedad que queremos conservar.
- Asociamos a la propiedad una función escalar que ha de ser cero.

$$C(\mathbf{x}) = 0$$

Estado de la simulación

Aplicación: Sólidos Articulados

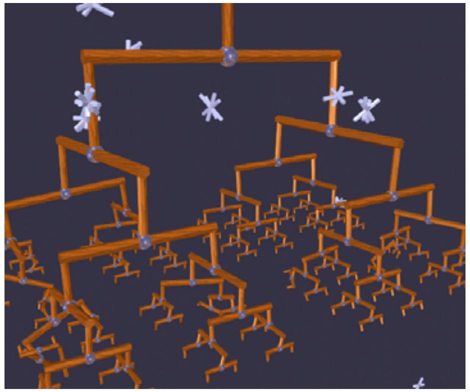
- Ejemplo: articulación esférica.
- ¿Cuál es la restricción a formular?

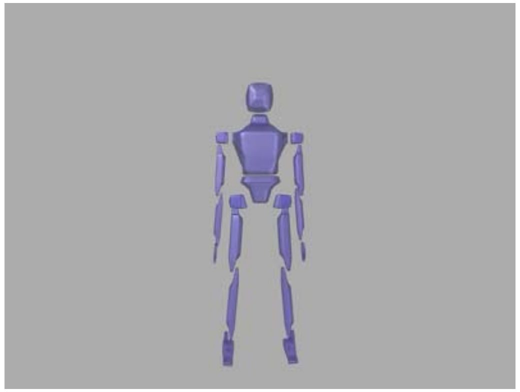


$$\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b = \mathbf{R}_a\mathbf{r}_a + \mathbf{x}_a - \mathbf{R}_b\mathbf{r}_b - \mathbf{x}_b = 0$$

En 3D son 3 restricciones, una por eje

Aplicación: Sólidos Articulados



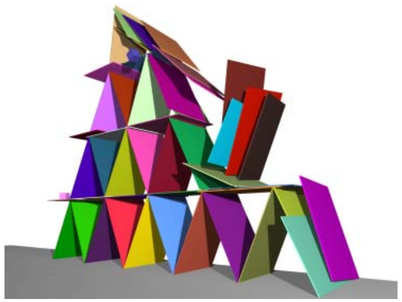


D. Baraff. 'Linear time dynamics using Lagrange multipliers', SIGGRAPH 1996

Aplicación: Ropa Inextensible

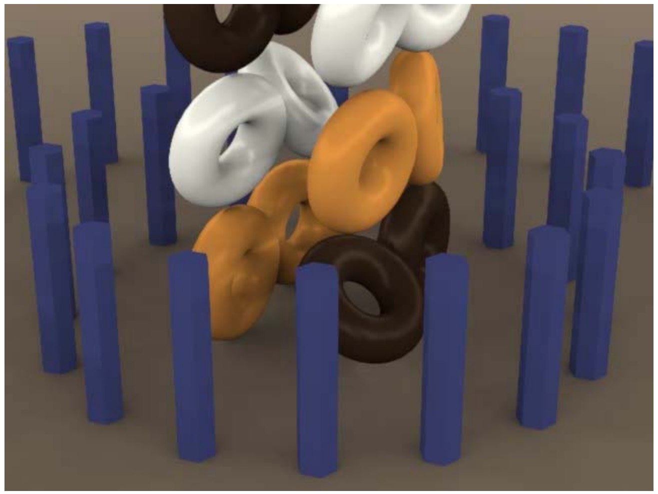
Goldenthal et al. 'Efficient simulation of inextensible cloth', SIGGRAPH 2007

Aplicación: Contactos



D. Baraff. 'Fast contact force computation for non-penetrating rigid bodies', SIGGRAPH 1994.
K. Erleben. 'Velocity-based shock propagation for multibody dynamics animation´, ACM TOG 2007.
Kaufman et al. 'Staggered projection for frictional contact in multibody systems', SIGGRAPH Asia 2008.
Otaduy et al. `Implicit contact handling for deformable objects', Eurographics 2009

Aplicación: Conservación de Volumen

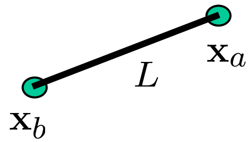


Irving et al. 'Volume conserving finite element simulations of deformable models', SIGGRAPH 2007.

Índice

Energía de Restricción

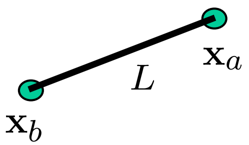
- Ejemplo: Longitud de un muelle



  - Propiedad: $\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\| = L_0$
  - Función escalar: $C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\| - L_0 = 0$
  - Energía: $E = \frac{1}{2}kC^2$

Fuerzas de Restricción

- Ejemplo: Longitud de un muelle



  - Fuerza = - Gradiente de la energía:
  - Fuerza: $\mathbf{F}_a = -\nabla_{\mathbf{x}_a} E = -k \cdot C \nabla_{\mathbf{x}_a} C$
  - La fuerza es la misma que con la ley de Hooke!
  - Notación Jacobiana: $\nabla C = (\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}})^T = \mathbf{J}^T$

Fuerzas de Restricción

- Otros ejemplos:
  - Simulación de ropa: mallar mediante triángulos y formular restricciones que conserven el área de los triángulos.
  - Simulación de sólidos: mallar mediante tetraedros y formular restricciones que conservar el volumen de los tetraedros.

  (En combinación con fuerzas de muelles)

  Ejercicio: añadir restricción de área al triángulo de la práctica 1.

Fuerzas Internas

- Si las restricciones se utilizan para modelar fuerzas internas (p.ej., elasticidad), hay que tener cuidado:
  - Las fuerzas de restricción han de sumar cero para conservar el momento lineal y el momento angular.

Pros y Contras

✓ Mecanismo poderoso para modelar fuerzas internas que conservan propiedades.

✓ Se pueden combinar y ponderar (constante k).

× Pueden ser costosas.

× Elegir las k-s puede ser complicado si hay muchas restricciones.

× Las restricciones pueden ser redundantes, competir, y/o cancelarse unas a otras.

Integración Implícita

- ODEs a integrar:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \longleftarrow \text{Incluye fuerzas de restricciones} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

- Euler semi-implícito:

$$(\mathbf{M} - h\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} - h^2\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}})\mathbf{v}(t+h) = (\mathbf{M} - h\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}})\mathbf{v}(t) + h\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$$

Jacobianas a calcular para las restricciones

Integración Implícita (1 Restricción)

- Energía: $E = \frac{1}{2}kC^2$
- Fuerza: $\mathbf{F} = -\nabla E = -k \cdot C\nabla C$
- Jacobiana:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}^2} = -k\nabla C(\nabla C)^T - k \cdot C\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x}^2}$$

Matriz de derivadas segundas (Hessiana)

Integración Implícita (Vector de Restricciones)

- Energía: $E = \frac{1}{2}\mathbf{C}^T\mathbf{K}\mathbf{C}$
- Fuerza: $\mathbf{F} = -\nabla E = -(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}})^T\mathbf{K}\mathbf{C} = -\mathbf{J}^T\mathbf{K}\mathbf{C}$
- Jacobiana:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}^2} = -\mathbf{J}^T\mathbf{K}\mathbf{J} - \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}^2}\mathbf{K}\mathbf{C}$$

Se complica mucho!
Mejor analizar cada restricción por separado

Restricciones Fuertes vs. Débiles

- Con las restricciones débiles no hay garantías de conseguir que se cumplan. Debemos aumentar k, pero eso trae problemas de inestabilidad, etc.
- Restricciones fuertes: vamos a calcular k de manera que las restricciones se cumplan exactamente.

Índice

- Concepto de restricción (constraint)
- Aplicaciones
- Restricciones Débiles: Energías y fuerzas
- Restricciones Fuertes: Multiplicadores de Lagrange
- Cuerpos articulados
- Colisiones

Multiplicadores de Lagrange

- Técnica para resolver problemas de optimización con restricciones.
- Problema de optimización:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

- Solución sin restricciones:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0$$

- Restricciones:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0$$

Multiplicadores de Lagrange

- Reescribimos el problema de optimización:

$$\min_{\mathbf{x},\lambda}\ f(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})^T \boxed{\lambda}$$

- Sistema a resolver:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \boxed{\mathbf{J}^T \lambda} = 0$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0$$

Multiplicadores de Lagrange: Vector de incógnitas de tamaño igual al número de restricciones

'Fuerzas' de restricciones: Su dirección es la misma que para restricciones débiles, pero la magnitud es desconocida a priori.

Dinámica + Restricciones

- ¿Cómo añadimos restricciones a las ODEs (Ley de Newton)?
- Opción 1:
  - Vamos a diferenciar las restricciones, y expresamos restricciones en las aceleraciones.
- Opción 2:
  - Integramos las ODEs, y expresamos las restricciones sobre las variables ya discretizadas en el tiempo.

Opción 1: Diferenciación de Restricciones

- Vamos a diferenciar las restricciones:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{x}} = 0$$

La derivada de la Jacobiana se suele tomar como 0.

Opción 1: Diferenciación de Restricciones

- Problema de optimización:

$$\min_{\ddot{\mathbf{x}},\lambda}\ \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}^*)^T \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}^*) + \ddot{\mathbf{x}}^T \mathbf{J}^T \lambda$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$$ Aceleraciones sin restricciones

- Da lugar al sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema nos quedan las ODEs que tenemos que resolver (y se aplican los métodos de integración típicos).

Opción 1: Diferenciación de Restricciones

- Al formular restricciones sobre las aceleraciones, se sufre desviación (drift).
- Reformular las restricciones con términos correctores:

$$\ddot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = -k_x \mathbf{C} - k_v \dot{\mathbf{C}}$$

Estos términos son, en el fondo, como una restricción débil que se suma a la restricción fuerte (un muelle con amortiguamiento)

Opción 2: Restricciones sobre Ecs. Discretizadas

- Integramos las velocidades y posiciones (vamos a asumir una solución linealizada):

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta t \mathbf{v}$$

- Restricciones con aproximación lineal:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{C}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{v} = -\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}(\mathbf{x}_0)$$

Opción 2: Restricciones sobre Ecs. Discretizadas

- Problema de optimización:

$$\mathtt{min}_{\mathbf{v},\lambda}\ (\mathbf{v}-\mathbf{v}^*)^T \mathbf{A}(\mathbf{v}-\mathbf{v}^*) + (\mathbf{v}^T \mathbf{J}^T + \tfrac{1}{\Delta t}\mathbf{C}(\mathbf{x}_0)^T)\lambda$$

$\mathbf{v}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ Velocidades sin restricciones

- Da lugar al sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Se obtienen, directamente, las velocidades al final del paso de simulación.

$-\mathbf{J}^T\lambda$ Fuerzas de restricción.

Multiplicadores de Lagrange

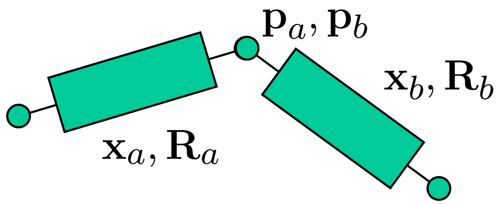
- Hay que resolver sistemas del tipo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si A es fácil de invertir, se sustituye la primera ecuación en la segunda.
- O se puede resolver todo el sistema a la vez: con MINRES ó GMRES si es disperso; SVD si es incompatible (overconstrained).

Sólidos Articulados

- Ejemplo: articulación esférica:



$$\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b = \mathbf{R}_a \mathbf{r}_a + \mathbf{x}_a - \mathbf{R}_b \mathbf{r}_b - \mathbf{x}_b = 0$$

- Utilizar método 2: restricción sobre ecs. discretizadas.

Sólidos Articulados

- Expresar la restricción con velocidades:

$$\mathbf{p}_{a,0} + \Delta t \dot{\mathbf{p}}_a - \mathbf{p}_b - \Delta t \dot{\mathbf{p}}_b = 0$$

- Utilizar velocidades del estado:

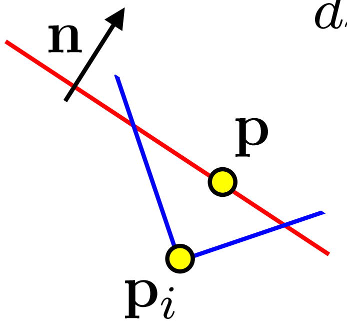
$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{v}_a + \omega_a \times (\mathbf{R}_a \mathbf{r}_a)$$

- Restricciones finales:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a + \mathbf{J}_{\omega_a} \omega_a + \mathbf{J}_{\mathbf{v}_b} \mathbf{v}_b + \mathbf{J}_{\omega_b} \omega_b = \frac{-1}{\Delta t} \mathbf{C}_0$$

Aquí utilizamos una técnica de linealización de la restricción ligeramente distinta a la planteada en la transparencia 26. No es tan general, pero es más fácil de aplicar en este caso.

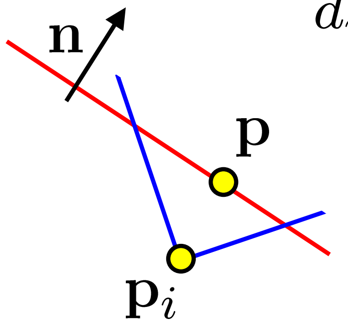
Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

Definición de una restricción: Distancia positiva.

Contacto mediante Restricciones



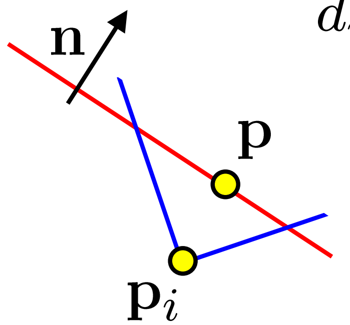
$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{n}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Fuerza normal, multiplicador de Lagrange.
Además, no puede ser fuerza atractora!

Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{n}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$d_i \cdot \lambda_i = 0$$

Complementareidad:
a)La distancia es 0.
b)La fuerza es 0.
Ambas no pueden ser positivas a la vez!

Contacto mediante Restricciones

$$\mathbf{Av} = \mathbf{b} + \mathbf{J}^T\lambda$$

$$\mathbf{Jv} \geq \mathbf{d}$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda^T(\mathbf{Jv} - \mathbf{d}) = 0$$

LCP = Linear Complementarity Problem

A este sistema se puede llegar aplicando la formulación 2, con restricciones sobre las ecuaciones discretizadas.