



Restricciones (Constraints)

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
4 de Octubre de 2010



Índice

- Concepto de restricción (constraint)
- Aplicaciones
- Restricciones Débiles: Energías y fuerzas
- Restricciones Fuertes: Multiplicadores de Lagrange
- Cuerpos articulados
- Colisiones



Concepto de Restricción

- Una propiedad que queremos conservar.
- Asociamos a la propiedad una función escalar que ha de ser cero.

$$C(\mathbf{x}) = 0$$

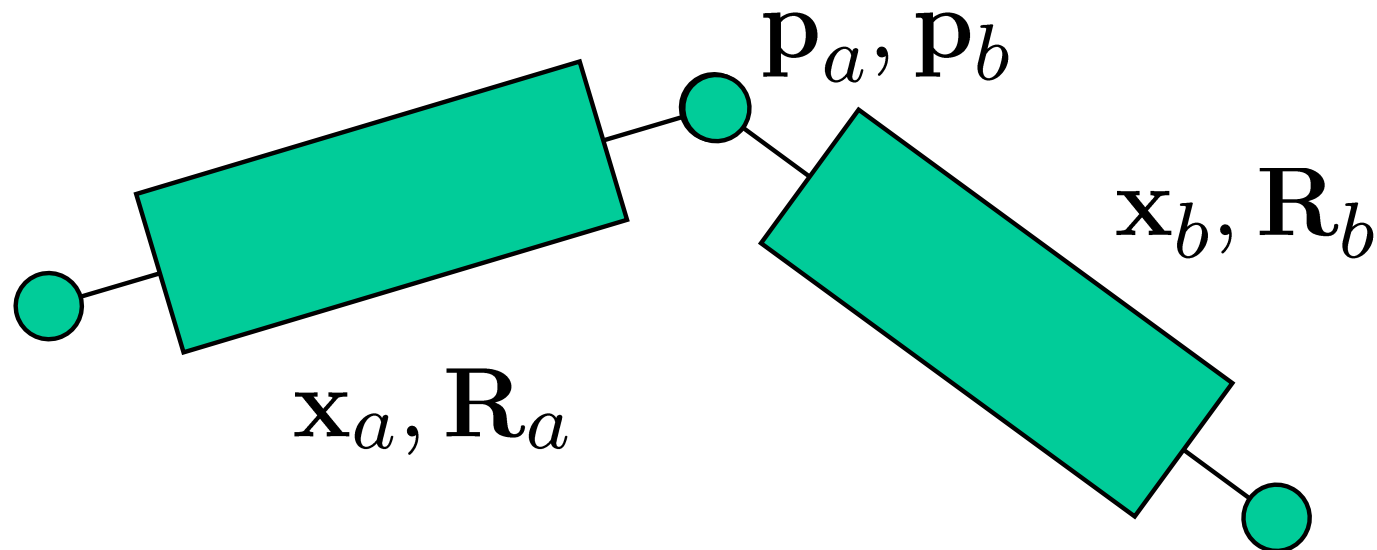


Estado de la simulación



Aplicación: Sólidos Articulados

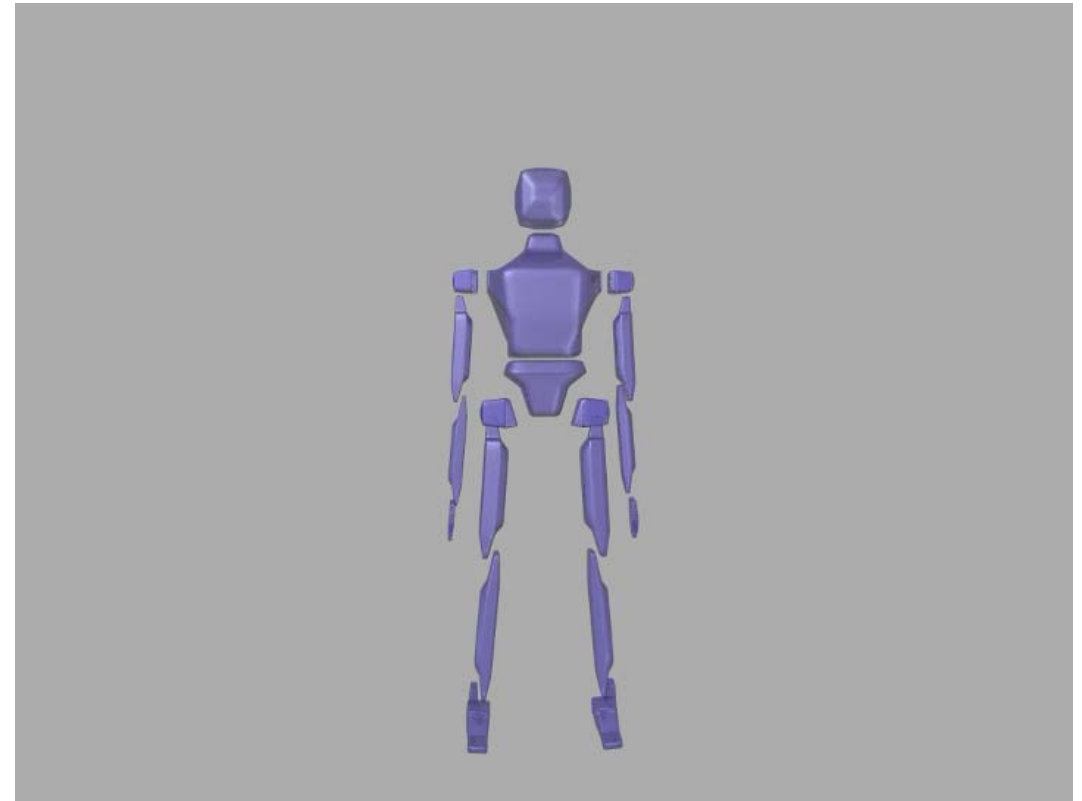
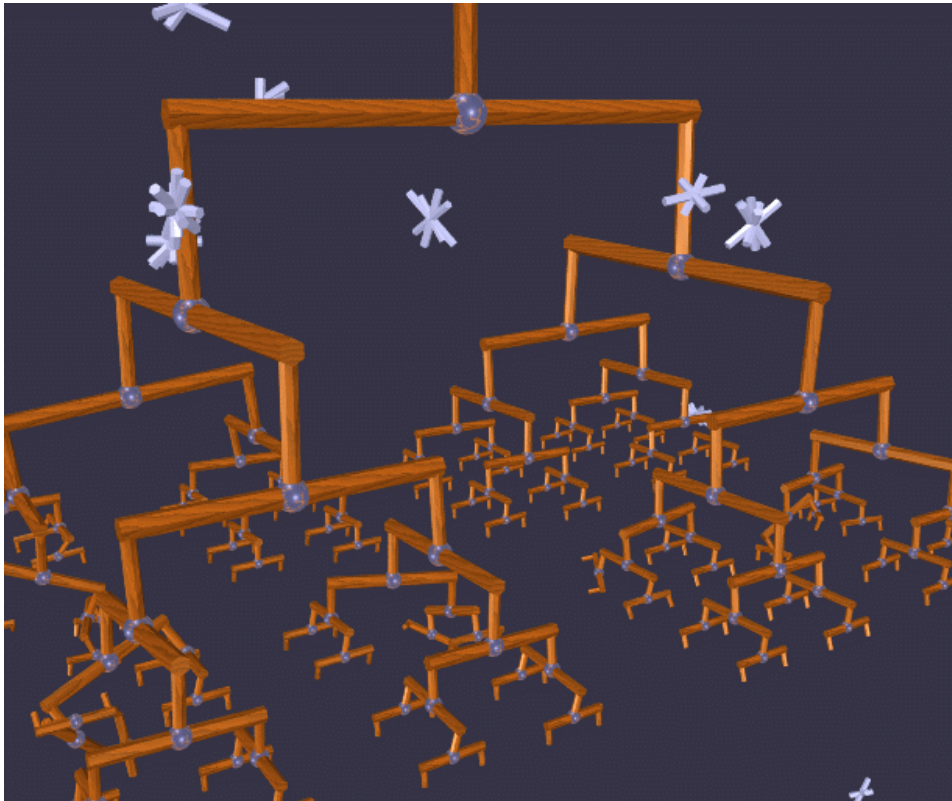
- Ejemplo: articulación esférica.
- ¿Cuál es la restricción a formular?



$$\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b = \mathbf{R}_a \mathbf{r}_a + \mathbf{x}_a - \mathbf{R}_b \mathbf{r}_b - \mathbf{x}_b = 0$$

En 3D son 3 restricciones, una por eje

Aplicación: Sólidos Articulados



D. Baraff. 'Linear time dynamics using Lagrange multipliers',
SIGGRAPH 1996

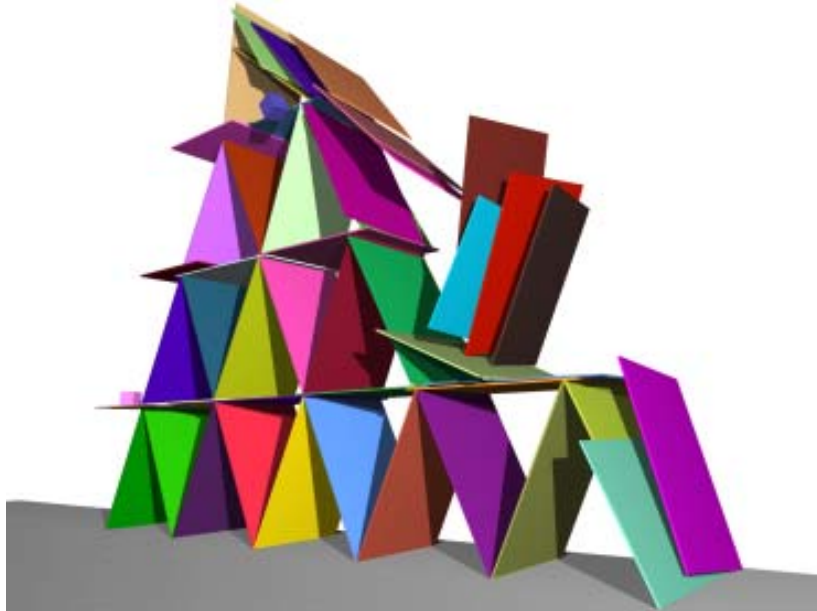


Aplicación: Ropa Inextensible



Goldenthal et al. 'Efficient simulation of inextensible cloth',
SIGGRAPH 2007

Aplicación: Contactos



D. Baraff. 'Fast contact force computation for non-penetrating rigid bodies', SIGGRAPH 1994.

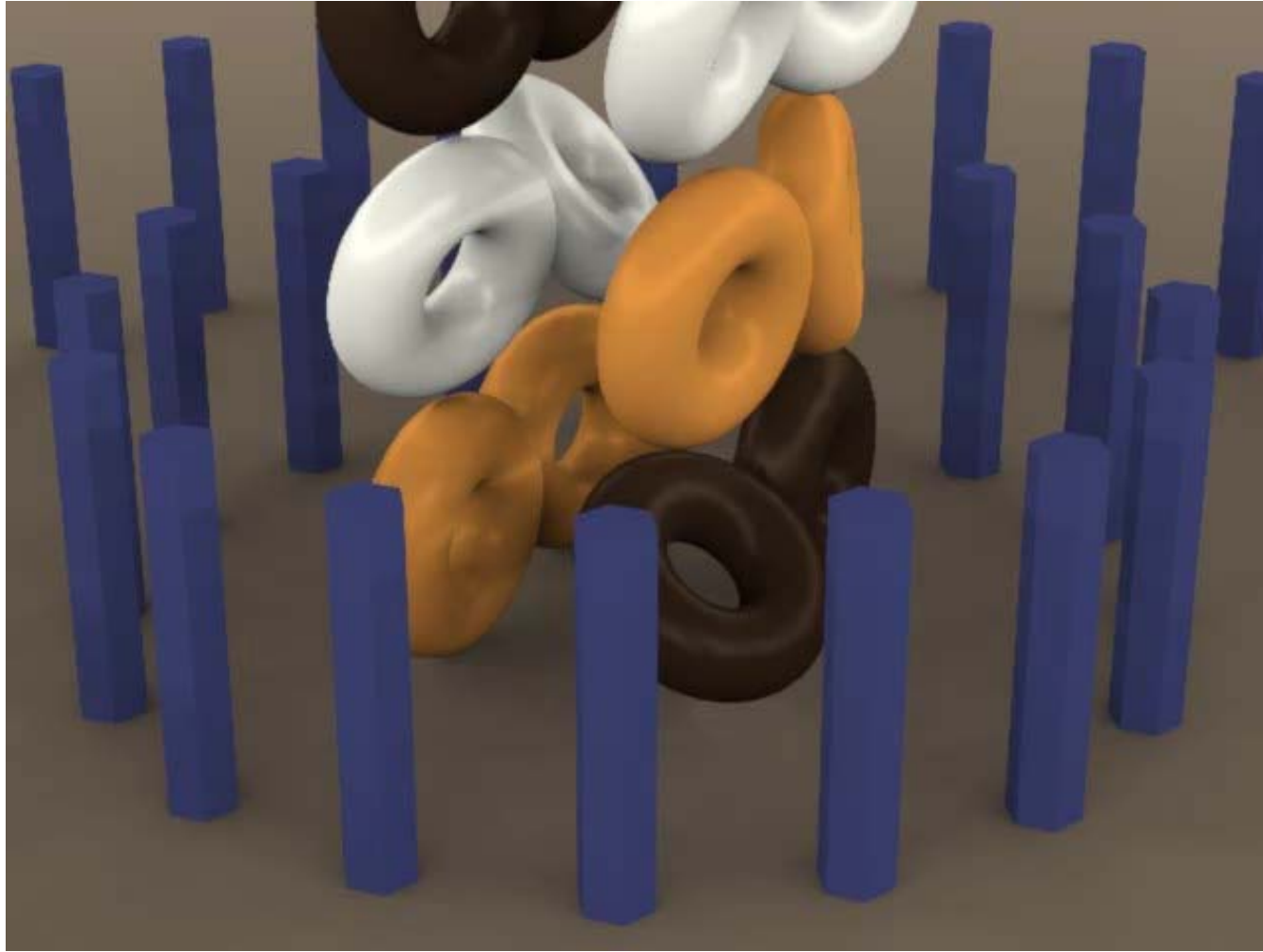
K. Erleben. 'Velocity-based shock propagation for multibody dynamics animation', ACM TOG 2007.

Kaufman et al. 'Staggered projection for frictional contact in multibody systems', SIGGRAPH Asia 2008.

Otaduy et al. 'Implicit contact handling for deformable objects', Eurographics 2009



Aplicación: Conservación de Volumen



Irving et al. 'Volume conserving finite element simulations of deformable models', SIGGRAPH 2007.

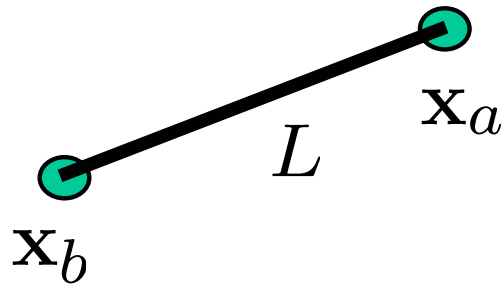
Índice

- Concepto de restricción (constraint)
- Aplicaciones
- **Restricciones Débiles: Energías y fuerzas**
- Restricciones Fuertes: Multiplicadores de Lagrange
- Cuerpos articulados
- Colisiones



Energía de Restricción

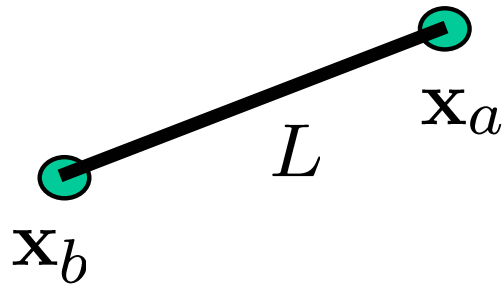
- Ejemplo: Longitud de un muelle



- Propiedad: $\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\| = L_0$
- Función escalar: $C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\| - L_0 = 0$
- Energía: $E = \frac{1}{2}kC^2$

Fuerzas de Restricción

- Ejemplo: Longitud de un muelle



- Fuerza = - Gradiente de la energía:
- Fuerza: $\mathbf{F}_a = -\nabla_{\mathbf{x}_a} E = -k \cdot C \nabla_{\mathbf{x}_a} C$
- La fuerza es la misma que con la ley de Hooke!
- Notación Jacobiana: $\nabla C = \left(\frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \mathbf{J}^T$

Fuerzas de Restricción

- Otros ejemplos:
 - Simulación de ropa: mallar mediante triángulos y formular restricciones que conserven el área de los triángulos.
 - Simulación de sólidos: mallar mediante tetraedros y formular restricciones que conserven el volumen de los tetraedros.

(En combinación con fuerzas de muelles)

Ejercicio: añadir restricción de área al triángulo de la práctica 1.



Fuerzas Internas

- Si las restricciones se utilizan para modelar fuerzas internas (p.ej., elasticidad), hay que tener cuidado:
 - Las fuerzas de restricción han de sumar cero para conservar el momento lineal y el momento angular.



Pros y Contras

- ✓ Mecanismo poderoso para modelar fuerzas internas que conservan propiedades.
- ✓ Se pueden combinar y ponderar (constante k).
- × Pueden ser costosas.
- × Elegir las k -s puede ser complicado si hay muchas restricciones.
- × Las restricciones pueden ser redundantes, competir, y/o cancelarse unas a otras.



Integración Implícita

- ODEs a integrar:

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \leftarrow \text{Incluye fuerzas de restricciones} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

- Euler semi-implícito:

$$\begin{aligned} (M - h \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} - h^2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}) \mathbf{v}(t+h) = \\ (M - h \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}}) \mathbf{v}(t) + h \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \end{aligned}$$

Jacobianas a calcular para las restricciones



Integración Implícita (1 Restricción)

- Energía: $E = \frac{1}{2}kC^2$

- Fuerza: $\mathbf{F} = -\nabla E = -k \cdot C \nabla C$

- Jacobiana:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}^2} = -k \nabla C (\nabla C)^T - k \cdot C \frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{x}^2}$$

Matriz de derivadas segundas (Hessiana)



Integración Implícita (Vector de Restricciones)

- Energía: $E = \frac{1}{2} \mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C}$
- Fuerza: $\mathbf{F} = -\nabla E = -\left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \mathbf{K} \mathbf{C} = -\mathbf{J}^T \mathbf{K} \mathbf{C}$
- Jacobiana:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}^2} = -\mathbf{J}^T \mathbf{K} \mathbf{J} - \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{K} \mathbf{C}$$

Se complica mucho!

Mejor analizar cada restricción por separado



Restricciones Fuertes vs. Débiles

- Con las restricciones débiles no hay garantías de conseguir que se cumplan. Debemos aumentar k , pero eso trae problemas de inestabilidad, etc.
- Restricciones fuertes: vamos a calcular k de manera que las restricciones se cumplan exactamente.



Índice

- Concepto de restricción (constraint)
- Aplicaciones
- Restricciones Débiles: Energías y fuerzas
- **Restricciones Fuertes: Multiplicadores de Lagrange**
- Cuerpos articulados
- Colisiones



Multiplicadores de Lagrange

- Técnica para resolver problemas de optimización con restricciones.
- Problema de optimización:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

- Solución sin restricciones:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0$$

- Restricciones:

$$C(\mathbf{x}) = 0$$



Multiplicadores de Lagrange

- Reescribimos el problema de optimización:

$$\min_{\mathbf{x}, \lambda} f(\mathbf{x}) + \mathbf{C}(\mathbf{x})^T \lambda$$

- Sistema a resolver:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}^T \lambda = 0$$
$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0$$

Multiplicadores de Lagrange:
Vector de incógnitas de
tamaño igual al número de
restricciones

'Fuerzas' de restricciones:

Su dirección es la misma que para restricciones débiles, pero la magnitud es desconocida a priori.



Dinámica + Restricciones

- ¿Cómo añadimos restricciones a las ODEs (Ley de Newton)?
- Opción 1:
 - Vamos a diferenciar las restricciones, y expresamos restricciones en las aceleraciones.
- Opción 2:
 - Integramos las ODEs, y expresamos las restricciones sobre las variables ya discretizadas en el tiempo.



Opción 1: Diferenciación de Restricciones

- Vamos a diferenciar las restricciones:

$$C(\mathbf{x}) = 0$$

$$\dot{C}(\mathbf{x}) = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{C}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{x}} = 0$$

La derivada de la Jacobiana se suele tomar como 0.



Opción 1: Diferenciación de Restricciones

- Problema de optimización:

$$\min_{\ddot{\mathbf{x}}, \lambda} \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}^*)^T \mathbf{M} (\ddot{\mathbf{x}} - \ddot{\mathbf{x}}^*) + \ddot{\mathbf{x}}^T \mathbf{J}^T \lambda$$

$$\ddot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \quad \text{Aceleraciones sin restricciones}$$

- Da lugar al sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema nos quedan las ODEs que tenemos que resolver (y se aplican los métodos de integración típicos).



Opción 1: Diferenciación de Restricciones

- Al formular restricciones sobre las aceleraciones, se sufre desviación (drift).
- Reformular las restricciones con términos correctores:

$$\ddot{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = -k_x \mathbf{C} - k_v \dot{\mathbf{C}}$$

Estos términos son, en el fondo, como una restricción débil que se suma a la restricción fuerte (un muelle con amortiguamiento)



Opción 2: Restricciones sobre Ecs. Discretizadas

- Integramos las velocidades y posiciones (vamos a asumir una solución linealizada):

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta t \mathbf{v}$$

- Restricciones con aproximación lineal:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{C}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{v} = -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{x}_0)$$



Opción 2: Restricciones sobre Ecs. Discretizadas

- Problema de optimización:

$$\min_{\mathbf{v}, \lambda} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)^T \mathbf{A} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) + (\mathbf{v}^T \mathbf{J}^T + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{x}_0)^T) \lambda$$
$$\mathbf{v}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{Velocidades sin restricciones}$$

- Da lugar al sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{C}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Se obtienen, directamente, las velocidades al final del paso de simulación.

$$-\mathbf{J}^T \lambda \quad \text{Fuerzas de restricción.}$$



Multiplicadores de Lagrange

- Hay que resolver sistemas del tipo:

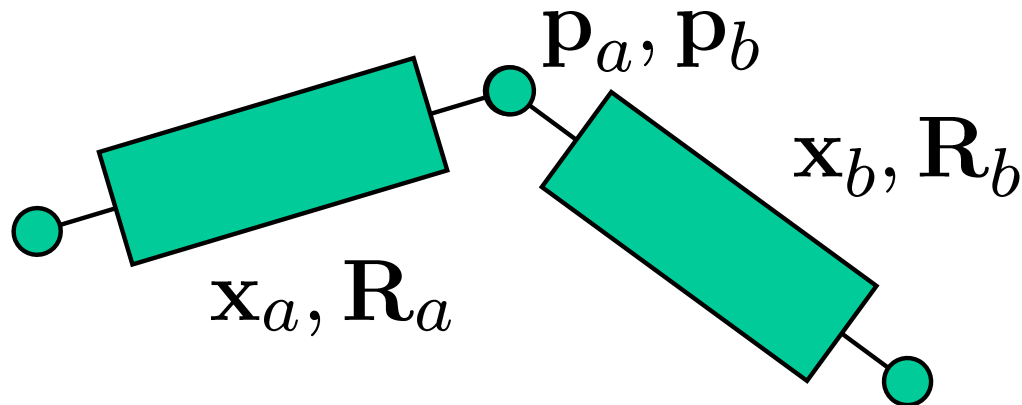
$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & 0 \end{pmatrix}$$

- Si \mathbf{A} es fácil de invertir, se sustituye la primera ecuación en la segunda.
- O se puede resolver todo el sistema a la vez: con MINRES ó GMRES si es disperso; SVD si es incompatible (overconstrained).



Sólidos Articulados

- Ejemplo: articulación esférica:



$$\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b = \mathbf{R}_a \mathbf{r}_a + \mathbf{x}_a - \mathbf{R}_b \mathbf{r}_b - \mathbf{x}_b = 0$$

- Utilizar método 2: restricción sobre ecs. discretizadas.

Sólidos Articulados

- Expresar la restricción con velocidades:

$$\mathbf{p}_{a,0} + \Delta t \dot{\mathbf{p}}_a - \mathbf{p}_b - \Delta t \dot{\mathbf{p}}_b = 0$$

- Utilizar velocidades del estado:

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \mathbf{v}_a + \boldsymbol{\omega}_a \times (\mathbf{R}_a \mathbf{r}_a)$$

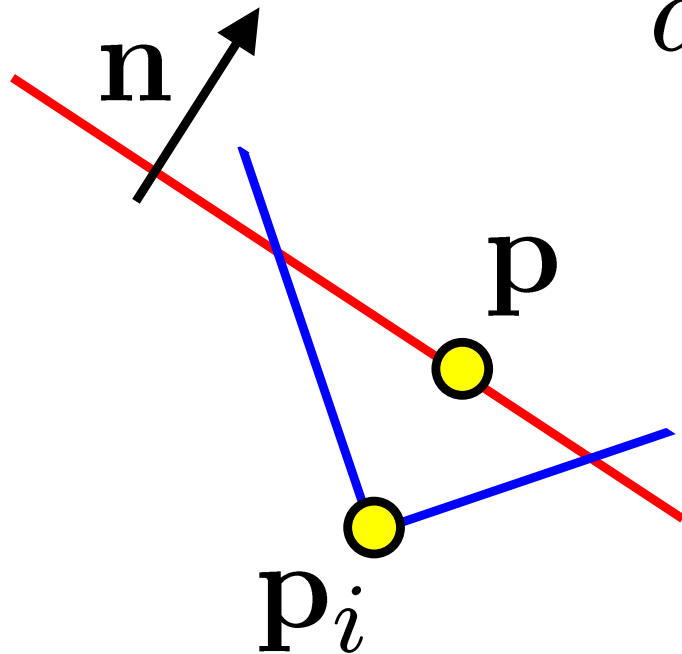
- Restricciones finales:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_a} \boldsymbol{\omega}_a + \mathbf{J}_{\mathbf{v}_b} \mathbf{v}_b + \mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}_b} \boldsymbol{\omega}_b = \frac{-1}{\Delta t} \mathbf{C}_0$$

Aquí utilizamos una técnica de linealización de la restricción ligeramente distinta a la planteada en la transparencia 26. No es tan general, pero es más fácil de aplicar en este caso.



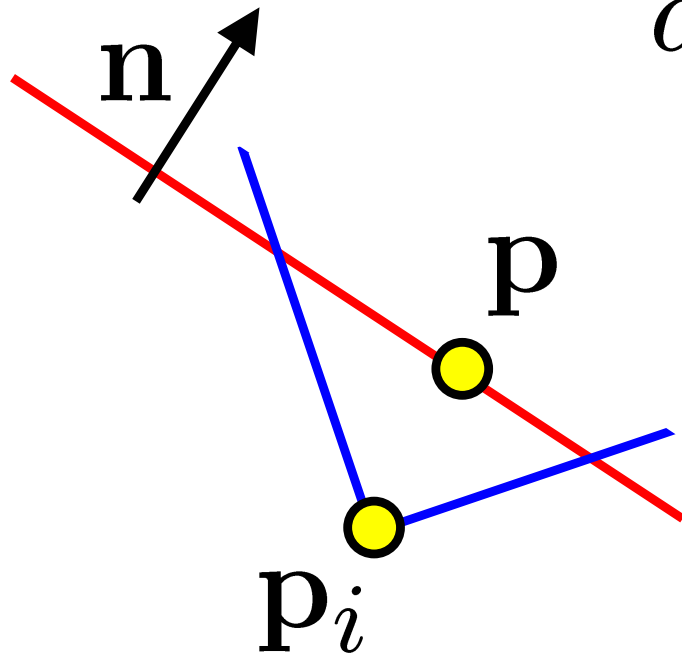
Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

Definición de una restricción:
Distancia positiva.

Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

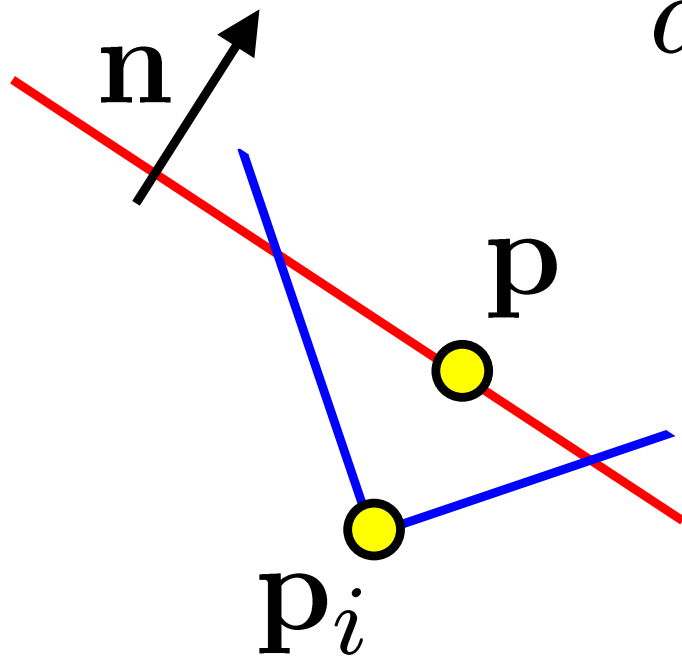
$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{n}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Fuerza normal, multiplicador de Lagrange.
Además, no puede ser fuerza atractora!



Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{n}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$d_i \cdot \lambda_i = 0$$

Complementareidad:

a) La distancia es 0.

b) La fuerza es 0.

Ambas no pueden ser positivas a la vez!



Contacto mediante Restricciones

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{J}^T \lambda$$

$$\mathbf{J}\mathbf{v} \geq \mathbf{d}$$

$$\lambda \geq 0$$

$$\lambda^T (\mathbf{J}\mathbf{v} - \mathbf{d}) = 0$$

LCP = Linear Complementarity Problem

A este sistema se puede llegar aplicando la formulación 2, con restricciones sobre las ecuaciones discretizadas.

