Modelos Masa-Muelle

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
6 de Septiembre de 2009

Ejemplo Masa-Muelle

Receta para una Simulación

- ¿Qué queremos simular? ¿Qué propiedades/efectos?
- Diseñar el modelo.
- Escribir ecuaciones diferenciales.
- Discretizar las ecuaciones.
- Añadir interacción.
- Simular!!

Receta para una Simulación

- ¿Qué queremos simular? Objetos elásticos.
- Diseñar el modelo. Masa-muelle.
- Escribir ecuaciones diferenciales. Ley de Newton.
- Discretizar las ecuaciones. Integración de ODEs.
- Añadir interacción. Tratamiento de colisiones.
- Simular!!

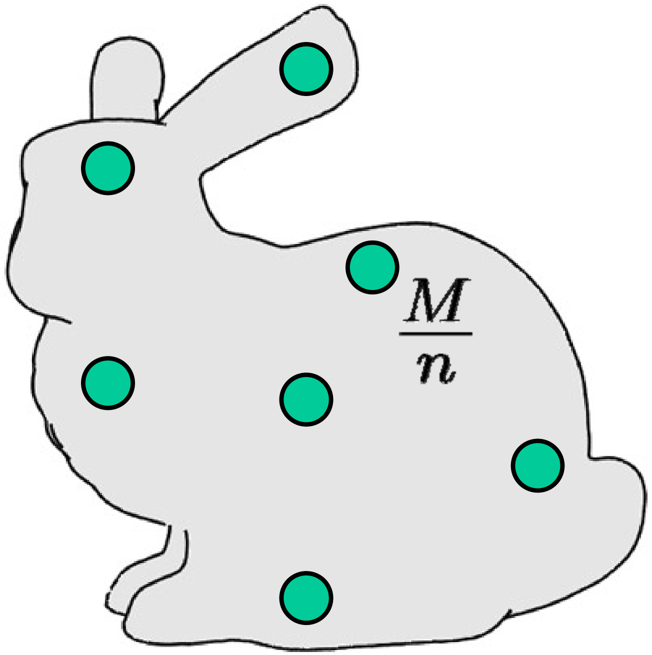
Índice

- Modelo masa-muelle
  - Leyes de Newton y Hook
  - Muelle 1D, muelle 3D
  - Mallado.
  - Formulación energética.
  - Formulación multidimensional.
  - Código orientado a objetos.
  - Amortiguamiento.
  - Muelles generalizados y aplicaciones.

Masa-Muelle: Propiedades

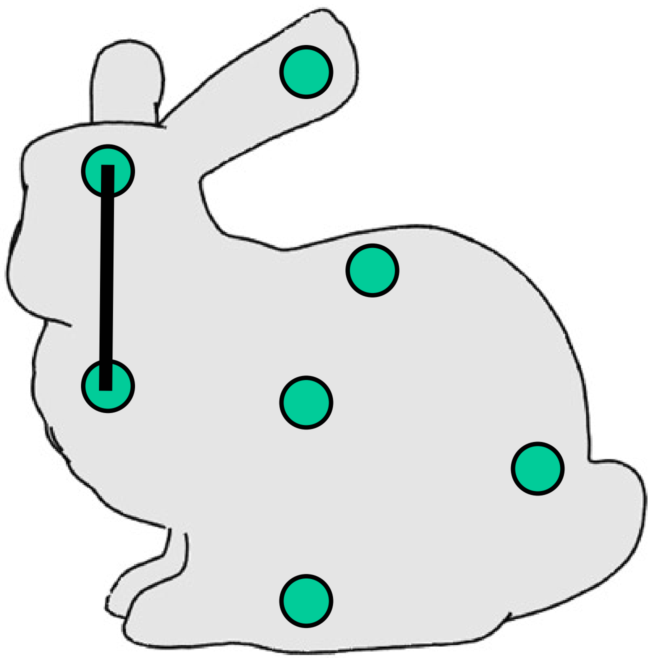
1. Masa/Inercia
   – Densidad: masa distribuida por todo el objeto
   – Nodos: masa concentrada en una serie de puntos

   – Masa total: M, Número de nodos: n, Masa nodo: $m = \frac{M}{n}$



Masa-Muelle: Propiedades

2. Elasticidad
   - Al deformar el objeto, almacena energía. El objeto vuelve a su estado original. Cuanta mayor deformación, más fuerza hay que realizar.
   - Comportamiento clásico de un muelle.
   - Los muelles entre nodos modelan el comportamiento elástico.
   - Rigidez: k
   - Longitud en reposo: L_0



2ª Ley de Newton

- Ecuación diferencial que regirá el comportamiento dinámico.
- Ecuación para un nodo:

$$m\boxed{\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}} = \sum \mathbf{F}$$

Ec. vectorial

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

Aceleración

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_z$$

3 Ecs. escalares

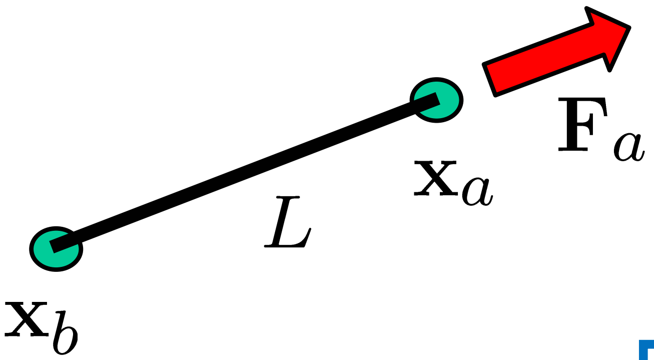
Ley de Hooke
Fuerza Elástica Lineal

- Fuerza dependiente de la deformación:

Muelle en 1D:

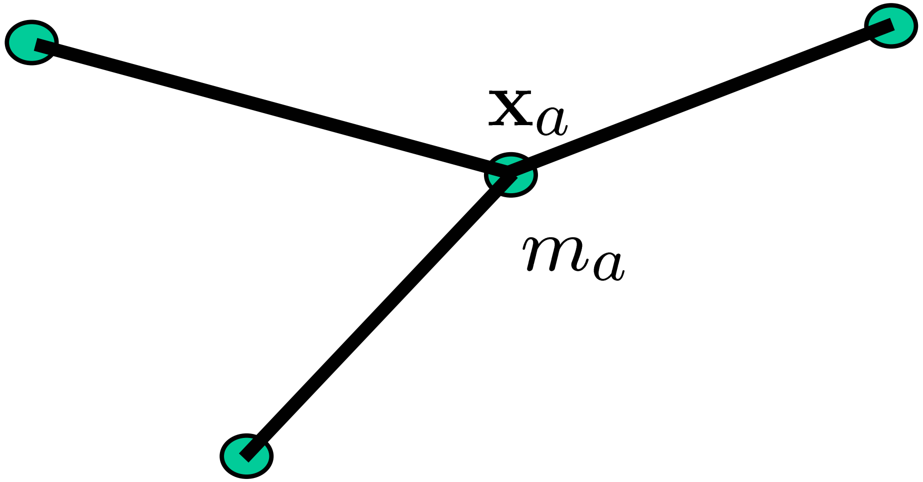
$$F_a = -k \cdot (L - L_0)\frac{x_a - x_b}{L}$$

Muelle en 3D:



$$\mathbf{F}_a = \underbrace{\boxed{-k \cdot (L - L_0)}}_{\text{Magnitud}} \overbrace{\boxed{\frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L}}}^{\text{Dirección}}$$

Todo junto...

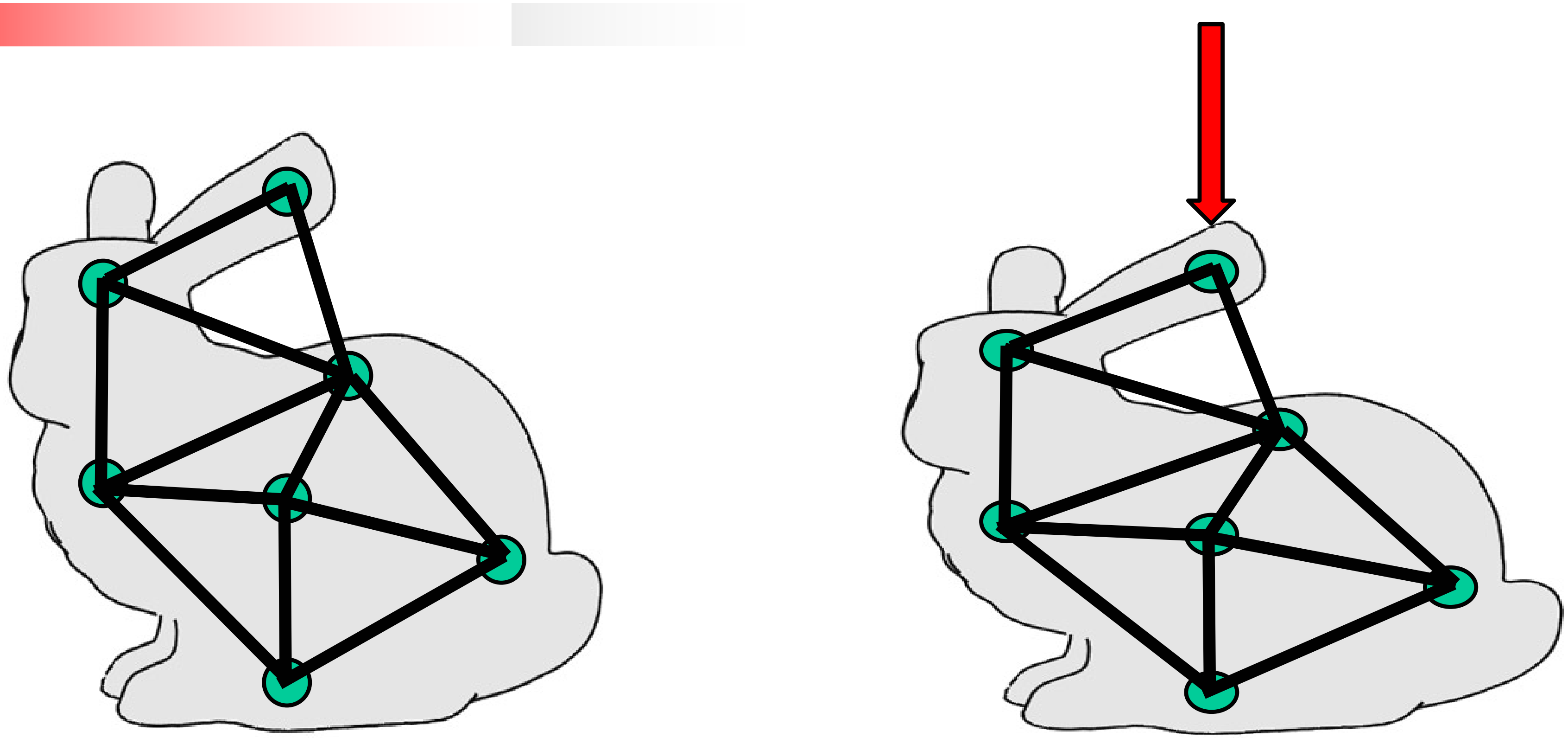


$$m_a \frac{d^2\mathbf{x}_a}{dt^2} = m_a\mathbf{g} + \sum \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{F}_i = -k \cdot (L_i - L_{i0}) \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i}{L_i}$$

(Una ecuación similar para cada nodo)

Contacto Externo



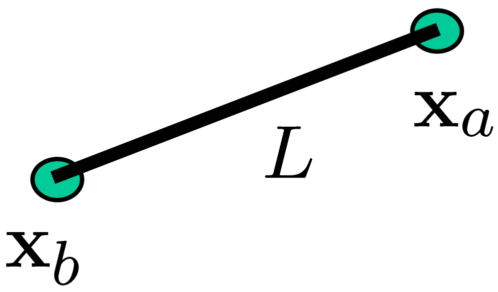
Pregunta 1: ¿Cómo se puede modelar el contacto?

- Mediante fuerzas sobre los nodos.

Pregunta 2: Si el conejo se ha deformado pero no se mueve, ¿cómo son las fuerzas?

- Han de sumar 0 en todos los nodos (equilibrio)

Energía Elástica



$$E = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$$

Pregunta: La energía elástica es una función escalar, pero ¿en qué dominio está definida? Es decir, ¿de qué variables depende (en 1D y 3D)?

$$E(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$$

Energía Elástica

- La fuerza se puede definir como el gradiente negativo de la energía.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_a &= -\nabla_{\mathbf{x}_a} E \\ &= -k \cdot (L - L_0) \nabla_{\mathbf{x}_a} L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\| \\ L^2 &= (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)^T (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \\ 2 \cdot L \nabla_{\mathbf{x}_a} L &= 2(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \\ \nabla_{\mathbf{x}_a} L &= \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L}\end{aligned}$$

¡Cuidado con el gradiente! Si buscamos la fuerza sobre un nodo, el gradiente representa la derivada con respecto a la posición de ese nodo.

Fuerzas y Energías

- ¡Formulación muy general!
- Idea general:
  - Queremos conservar una propiedad durante la simulación (p.ej., que la altura media de los alumnos sea 2m).
  - Definimos una energía que es mínima si la propiedad se cumple y crece según nos distanciamos de ella.
  - El gradiente negativo nos da una fuerza que lleva la simulación hacia la propiedad.

- (Más en el tema sobre restricciones)

Formulación Multidimensional

- Un vector agrupa la posición de todos los nodos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i+1} \\ \cdots \end{pmatrix}_{3n \times 1}$$

- Energía elástica total (suma de energías de muelles):

$$E = \sum E_i$$

- 2ª Ley de Newton en forma vectorial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}} E + \mathbf{F}$$

Formulación Multidimensional

- 2ª Ley de Newton en forma vectorial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}} E + \mathbf{F}$$

Matriz de masas

Gradiente de la energía

Otras fuerzas (gravedad, etc.)

Pregunta 1: ¿Qué dimensión y qué valores tiene la matriz de masas?

- Masas de los nodos en la diagonal.

Ejercicio: Calcular la fuerza elástica para un triángulo (3 nodos y 3 muelles)

Código Object-Oriented (1)

```
class node  {
  float mass;
  vec3 x, v, a, F;
  vector<spring*> springs;

  void calcAcceleration();
}
```

```
class spring  {
  float stiffness;
  float length;
  vec3 F;
  node *na, *nb;

  vec3 getForce(node n);
}
```

```
for each node
  node.F = 0;
  for each spring in node.springs
    node.F += spring.getForce(node);
  node.calcAcceleration();
```

Código Object-Oriented (2)

```
class node  {
  float mass;
  vec3 x, v, a, F;

  void calcAcceleration();
}
```

```
class spring  {
  float stiffness;
  float length;
  vec3 F;
  node *na, *nb;

  void calcForce();
}
```

```
for each node
  node.F = 0;

for each spring
  spring.calcForce();
  spring.na.F += spring.F;
  spring.nb.F -= spring.F;

for each node
  node.calcAcceleration();
```

Con mallas, suele haber dos opciones:

a) calcular y distribuir a nodos

b) bucles anidados en los nodos

Amortiguamiento

- En los nodos:

$$\mathbf{F}_a = -d \cdot \dot{\mathbf{x}}_a$$

- En los muelles, velocidad relativa:

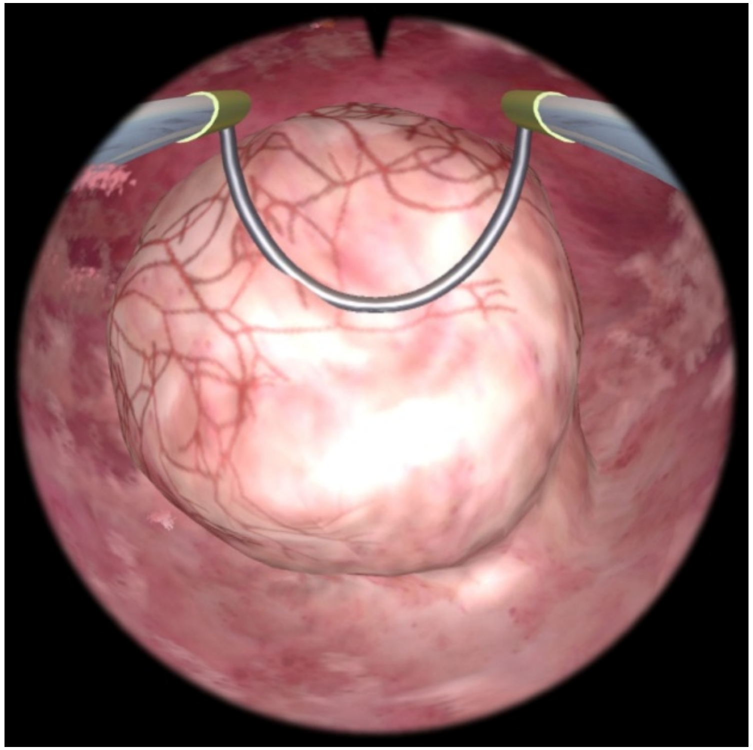
$$\mathbf{F}_a = -d \cdot (\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}_b)$$

- En los muelles, velocidad proyectada:

$$\mathbf{F}_a = -d \cdot \left((\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}_b)^T \left(\frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L} \right) \right) \left(\frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L} \right)$$

Es el mejor de los 3, porque sólo amortigua deformación relativa, no movimiento absoluto.

Aplicaciones (Muelles con Extensiones o Generalizados)



Referencias

- Notas de Baraff y Witkin.
- Libro de Erleben.

(ver web de la asignatura)