

# FEM para Animación de Deformaciones

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada  
29 de Noviembre de 2010



# Índice

- Repaso
  - Ec. de elasticidad en 3D
  - Ritz-Galerkin en 3D
  - Problema FEM estático
- Hoy
  - Dinámica
  - Simulación de grandes deformaciones
  - Plasticidad
  - Fractura



## Elasticidad + Dinámica

- Formulación fuerte: problema estático.

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b = 0$$

- Formulación fuerte: problema dinámico. Se añade la fuerza de inercia.

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b - m\mathbf{a} = 0$$

↑  
Densidad

- El resultado es la 2ª ley de Newton en el continuo.



## Ecuación Dinámica

- Al aplicar el método de Galerkin, el término de inercia se integra en los elementos.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \int_{\Omega_i} m \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i d\Omega$$

- Otra opción: concentrar la masa en los nodos (*mass lumping*), dando lugar a una matriz diagonal. La masa de los nodos se puede calcular repartiendo la masa de cada tetraedro entre sus nodos.

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_i)$$



## Amortiguamiento

- Se podría modelar mediante una fuerza en el continuo, dependiente de la derivada de la deformación (*strain rate*). Da lugar a una matriz de amortiguamiento.
- Es habitual aplicar un modelo concentrado en los nodos (amortiguamiento de Rayleigh):

$$\mathbf{f}_d = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

- El amortiguamiento de Rayleigh tiene una parte que corresponde con velocidades de nodos, y una parte que corresponde con velocidades relativas.



## Integración Numérica

- Se puede aplicar cualquiera de los métodos de integración usados con masa-muelle.
- Euler explícito. Las fuerzas elásticas se evalúan en función de las deformaciones del paso previo.
$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}_i - \mathbf{D}\mathbf{v}_i)$$
- Euler implícito. Se ha de resolver un sistema lineal.
$$\mathbf{A}\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{b}, \mathbf{A} = \mathbf{M} + \Delta t \mathbf{D} + \Delta t^2 \mathbf{K}$$
- La matriz del sistema es dispersa, simétrica y definida positiva. Se puede resolver por gradiente conjugado, factorización de Cholesky...



## Ventajas de FEM

- Las características del material vienen definidas por propiedades locales (módulo de Young, coeficiente de Poisson)...
- La solución es independiente del mallado (Suponiendo suficiente resolución).



## Grandes Deformaciones

- Opción 1: Usar el tensor de deformación de Green.
$$\epsilon_G = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$$
- Material lineal con tensor de Green: Modelo de St. Venant – Kirchhoff (StVK).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
$$\sigma = \lambda \cdot \text{traza}(\epsilon)\mathbf{I} + 2\mu\epsilon$$
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Requiere linealizar, lo cual puede dar problemas cuando los tetraedros están muy deformados. P.ej., es incorrecto ante tetraedros invertidos.

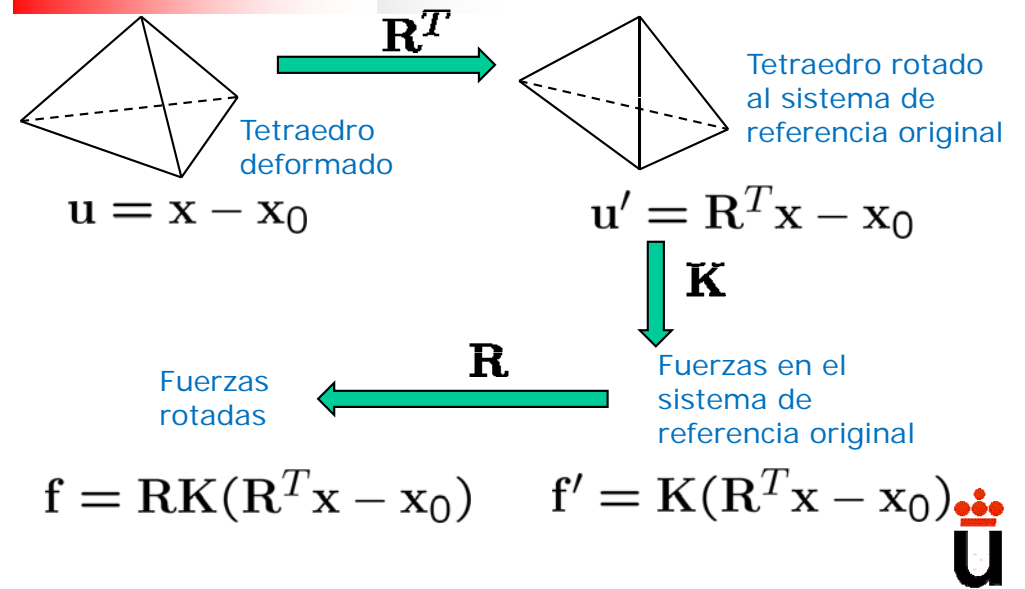


# Grandes Deformaciones

- Opción 2: Elasticidad co-rotacional. Medir la deformación en el sistema de referencia local rotado.
- Se ha de extraer el movimiento de sólido rígido. Puede ser global (*global co-rotational methods*) o local (*stiffness warping*).



# Stiffness Warping (Concepto)



# Stiffness Warping (Ensamblaje)

- Elasticidad Lineal:

$$f = Ku = K(x - x_0) = Kx - f_0$$

$$K = \sum_i K_i$$

- Stiffness Warping:

$$f = Kx - f_0$$

$$K = \sum_i R_i K_i R_i^T \quad f_0 = \sum_i R_i K_i x_0$$

- El cálculo de la rotación y el ensamblaje se han de realizar en cada paso de simulación.
- Se aplica la rotación a cada bloque 3x3 de la matriz de rigidez.



# Stiffness Warping (Rotación)

- Primero se calcula la transformación afín de  $x_0$  a  $x$  para los 4 nodos de un tetraedro.

$$x = Ax_0 + t$$

- Luego se hace la descomposición polar, de manera que se separa la rotación del escalado.

$$A = R \cdot S$$



# Plasticidad

- Cuando un material supera un límite de deformación, parte de la deformación pasa a ser permanente (plástica). El cálculo de fuerzas dependerá sólo de la deformación elástica.

$$\epsilon = \epsilon_{elastic} + \epsilon_{plastic}$$

$$f_{elastic} = f(\epsilon - \epsilon_{plastic})$$

- La deformación plástica se inicializa a 0 y evoluciona conforme a 3 parámetros: máxima deformación elástica (*yield*), máxima deformación plástica (*max*) y coeficiente de flujo plástico (*creep*).

$$\text{if } \|\epsilon\| > \text{yield}, \quad \epsilon_{plastic} + = \text{creep} \cdot \epsilon_{elastic}$$

$$\text{if } \|\epsilon_{plastic}\| > \text{max}, \quad \epsilon_{plastic} * = \text{max} / \|\epsilon_{plastic}\|$$



# Fractura

- El material se fractura si la fuerza interna en alguna dirección supera un máximo. La fuerza direccional se puede calcular a partir del tensor de tensión (stress).

$$f_n = n^T \sigma n \quad \text{Fuerza direccional}$$

- La dirección de máxima tensión se puede calcular haciendo el análisis de autovalores y autovectores del tensor de tensión.

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad \text{Autovalores}$$

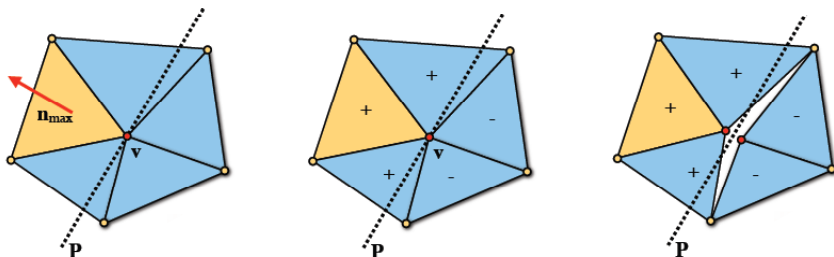
$$\{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{Autovectores asociados}$$

$$n_{max} = e_1 \quad \text{Dirección de tensión max.}$$



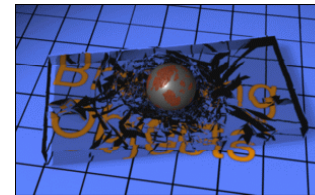
# Fractura (Separación de Tetraedros)

- Dependiendo del modelo de deformación, la tensión se puede calcular por tetraedro (modelo lineal) o por nodo (modelo no-lineal).
- Cuando la tensión supera el umbral, se selecciona un nodo por donde se va a fracturar. La superficie de fractura es perpendicular al autovector de tensión máxima, y se separan tetraedros a un lado y otro.

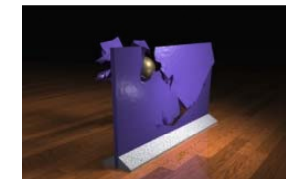


# Fractura

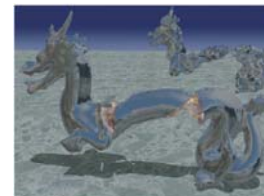
- Existen muchos algoritmos para determinar cómo fracturar la malla a partir de la tensión máxima.



Animation of brittle fracture [O'Brien & Hodgins 1999]



Animation of ductile fracture [O'Brien et al. 2002]



Interactive virtual materials [Müller & Gross 2004]



Fracture for videogames [Parker & O'Brien 2009]



## Referencias Principales

- K.-J. Bathe, "*Finite Element Procedures*", Prentice Hall, 1995.
- T. Hughes, "*The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*", Dover Publications, 2000.
- M. Müller, M. Gross. "*Interactive Virtual Materials*", Graphics Interface 2004.



## Otros...

- Usar mallas embebidas. Separa la complejidad de la superficie de la discretización de la deformación.
- Mallas embebidas con funciones de forma complejas. Homogeneización [Nesme SIGGRAPH 2009, Karevych SIGGRAPH 2009]
- Remallado para corte y fractura, o cortar sin remallar (x-FEM, discontinuous Galerkin...) [Jerabkova IEEE CG&A 2009, Kaufmann SCA 2008]
- Simulación de viscoplasticidad. Remallado continuo y transferencia de variables [Bargteil SIGGRAPH 2007]
- Captura y modelado de materiales no lineales [Bickel SIGGRAPH 2009]
- Simulación con contacto [Otaduy Eurographics 2009]

