Universidad Rey Juan Carlos

Animación Avanzada

Introducción al método de los Elementos Finitos.

M. Isabel Herreros Cid

Curso 2011-2012

Introducción al método de los Elementos Finitos

- Introducción: elemento 1D lineal sometido a tracción-compresión
- Campo de desplazamientos y deformación unitaria
- Tensión y deformación
- Trabajo virtual de las fuerzas externas
- Trabajo virtual de las fuerzas internas. Matriz de rigidez
- Principio de los trabajos virtuales
- Ensamblado
- Generalización del método
- Ejemplos

¡! **Referencia:** C. Hirsch, ***Numerical Computation of Internal and External Flows***, *Vol 1: Fundamentals of numerical Discretization*, Wiley 1988.

Introducción: elemento 1D lineal sometido a tracción-compresión

- Supongamos una barra elástica de sección constante sometida a tracción-compresión.
- Se divide el dominio (la barra) en porciones menores llamadas **elementos** y se estudia el comportamiento del material en cada uno de los elementos.
- Se comenzará estudiando el caso de un único elemento de barra sometido a dos fuerzas axiales aplicadas en el centro de gravedad de las secciones externas.
- A continuación se considerará el caso de varios elementos dispuestos de manera lineal, que permitirá introducir el concepto de **ensamblado** de las matrices de rigidez de los elementos en una única matriz global.

Campo de desplazamientos y deformación unitaria

- El efecto de las fuerzas a las que esta sometida la barra es causar un deformación en la misma.
- Consideraremos que, para todas las partículas de la barra, el **campo de desplazamientos** dependerá sólo del eje x: $u = u(x)$
- Este campo de desplazamientos puede aproximarse mediante las **funciones de forma** lineales (o funciones de peso) $N_1(x)$ y $N_2(x)$:

$$u(x) = \hat{u}_1 N_1(x) + \hat{u}_2 N_2(x)$$

siendo: $N_1(x) = (1 - x/L)$

$$N_2(x) = x/L$$

donde L es la longitud de la barra y $\hat{u}_1$ y $\hat{u}_2$ son los desplazamientos en los nodos 1 y 2 (a ambos extremos del elemento).

La expresión para los desplazamientos es, entonces:

$$u(x) = \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right), \frac{x}{L} \right\} . \left\{ \begin{matrix} \hat{u}_1 \\ \\ \hat{u}_2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \{N_1(x), N_2(x)\} \left\{ \begin{matrix} \hat{u}_1 \\ \\ \hat{u}_2 \end{matrix} \right\} = \mathbf{N}.\hat{\mathbf{u}}$$

donde **N** es una matriz que contiene las funciones de forma y $\hat{\mathbf{u}}$ es el vector de incógnitas nodales.

- La **deformación unitaria en un punto** cualquiera de la barra (supuestas pequeñas deformaciones):

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = S\boxed{u} = S.\boxed{\mathbf{N}.\hat{\mathbf{u}}}$$

siendo *S* un operador matricial, que en este caso se reduce a una única componente: $\frac{\partial}{\partial x}$

- El producto del operador matricial *S* y la matriz de funciones de forma **N** da como resultado la matriz **B**:

$$\mathbf{B} = S.\mathbf{N} = \frac{\partial}{\partial x}.\{N_1(x), N_2(x)\}$$

$$= \left\{\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}\right\} = \left\{-\frac{\mathbf{1}}{L}, \frac{\mathbf{1}}{L}\right\}$$

Pudiendo expresarse entonces la deformación unitaria ε como:

$$\varepsilon = \boxed{S.\mathbf{N}}.\hat{\mathbf{u}} = \boxed{\mathbf{B}}.\hat{\mathbf{u}} = \left\{-\frac{\mathbf{1}}{L}, \frac{\mathbf{1}}{L}\right\} . \left\{\begin{matrix} \hat{u}_1 \\ \\ \hat{u}_2 \end{matrix}\right\}$$

Tensión y deformación

- El comportamiento de un material frente a una variación de tensión puede describirse mediante su **ecuación constitutiva o ley de comportamiento**:

$$\Delta\sigma_{ij} = D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ los tensores de tensión y deformación (segundo orden), y **D** el tensor constitutivo (cuarto orden).

- Para un material elástico lineal en el caso 1D la expresión anterior se reduce a:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$$

siendo *E* el módulo de elasticidad del material.

Si además, tanto la deformación como la tensión iniciales son nulas:

$$\sigma = E\,\boxed{\varepsilon}$$

Y podremos encontrar una aproximación de la tensión en función de la deformación:

$$\sigma = E\,\boxed{\mathbf{B}\,\hat{\mathbf{u}}}$$

Trabajo virtual de las fuerzas externas

- Supongamos dos fuerzas exteriores aplicadas en los extremos de la barra: F_1 en el nodo 1 y F_2 en el nodo 2.
- El trabajo virtual de las dos fuerzas externas será:

$$\delta W_{ext} = \delta \hat{u}_1 \ F_1 + \delta \hat{u}_2 \ F_2$$

o expresado en forma matricial:

$$\delta W_{ext} = \{\delta \hat{u}_1, \delta \hat{u}_2\} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \\ F_2 \end{Bmatrix} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \ \mathbf{F}$$

- Si además actúan sobre la barra fuerzas de masa a lo largo de su eje, habría que añadir el siguiente término:

$$\delta W_{ext}^{b} = \int_{vol} b \, \delta u \, dV_{ol}$$

donde *b* es la fuerza por unidad de volumen a lo largo del eje x, extendiéndose la integral a toda la barra.

Podemos expresar la integral anterior en función de los desplazamientos nodales:

$$\delta W^{b}_{ext} = \int_{vol} b(\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2) \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ \\ N_2(x) \end{Bmatrix} dV_{ol}$$

$$\delta W^{b}_{ext} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \, b \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} A \, dx$$

siendo *A* la sección de la barra. En caso de que esta sea constante, la expresión anterior se reduce a:

$$\delta W^{b}_{ext} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} bAL \\ \frac{1}{2} bAL \end{Bmatrix}$$

Que equivale a distribuir entre los dos nodos la fuerza total *bAL* que actúa sobre la barra.

Denominando:

$$\mathbf{F}_b = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}bAL \\ \\ \frac{1}{2}bAL \end{Bmatrix}$$

El **trabajo virtual de las fuerzas externas**:

$$\delta W_{ext} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \{\mathbf{F} + \mathbf{F}_b\}$$

Trabajo virtual de las fuerzas internas

- El trabajo virtual de las fuerzas internas viene dado por:

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \delta\varepsilon^T \; \sigma \, dV_{ol}$$

en la que se pueden aproximar tanto los incrementos virtuales de deformación como las tensiones empleando la aproximación al campo de desplazamientos:

$$\delta\varepsilon^T = \delta(\mathbf{B} \; \hat{\mathbf{u}})^T = \delta\hat{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T$$

siendo

$$\sigma = E \, \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{u}}$$

sustituyendo en la expresión del trabajo virtual de las fuerzas internas:

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T E \, \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{u}} \; dV_{ol}$$

y como todos los factores son constantes, la integral resulta ser:

$$\delta W_{int} = \int_{vol} \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T E \, \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{u}} \, dV_{ol} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T E \; \mathbf{B} \, \hat{\mathbf{u}} \; LA$$

teniendo en cuenta que $\mathbf{B} = \left\{ -\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right\}$

y calculando el producto $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, obtenemos:

$$\delta W_{int} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \boxed{\begin{Bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{Bmatrix}} \hat{\mathbf{u}} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \boxed{\mathbf{K}} \, \hat{\mathbf{u}}$$

la matriz **K** se denomina **matriz de rigidez** de la barra y es una matriz singular (y por tanto no inversible).

Principio de los trabajos virtuales

- Una vez conocidos los trabajos virtuales de las fuerzas internas y externas, el **Principio de los Trabajos Virtuales** permite establecer la igualdad:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}$$

y sustituyendo las expresiones obtenidas con anterioridad:

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K}\,\hat{\mathbf{u}} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \{\mathbf{F} + \mathbf{F_b}\}$$

Puesto que el campo de desplazamientos virtuales puede ser cualquiera, siempre y cuando sea compatible con las restricciones del movimiento, tendremos:

$$\boxed{\mathbf{K}\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \mathbf{F_b}}$$

que es la **expresión del sistema de ecuaciones obtenido por el Método de los Elementos Finitos (FEM)**.

- Puesto que **K** es singular, el sistema anterior tiene infinitas soluciones, por lo que es imprescindible imponer las **condiciones de contorno en desplazamientos** para evitar que el movimiento del elemento sea el de un sólido rígido.

Ejemplo:

Supongamos que el nodo izquierdo (nodo 1) está fijo (u_1=0). Al aplicar una fuerza en el extremo opuesto (nodo 2) en el nodo 1 aparecerá una reacción R_1 desconocida. El sistema de ecuaciones será:

$$\frac{EA}{L}\begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 = 0 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

solución:

$$\hat{u}_2 = \frac{L}{EA}\,(f_2)$$

$$R_1 = -\,f_2 = -\frac{EA}{L}\hat{u}_2$$

Ensamblado

- Hasta ahora se ha considerado la barra discretizada en un único elemento lineal.
- Supongamos ahora que la barra está discretizada en 2 elementos (3 nodos).
- Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, habrá que obtener primero el **trabajo virtual de las fuerzas externas** para los 3 nodos:

$$\delta W_{ext} = \delta\hat{u}_1.F_1 + \delta\hat{u}_2.F_2 + \delta\hat{u}_3.F_3$$

o bien:

$$\delta W_{ext} = \delta\hat{\mathbf{u}}^T.\mathbf{F}$$

siendo $\qquad \hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)^T$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$$

- Si existen **fuerzas de masa**, su trabajo sería el de los trabajos realizados en cada elemento:

$$\delta W_{ext}^{b} = \int_{vol} b\,\delta u\, dV_{ol} = \int_{b1} b \boxed{\delta u}\, dV_{ol} + \int_{b2} b\,\boxed{\delta u}\, dV_{ol}$$

la integral correspondiente al primer elemento:

$$\delta W_{ext}^{b_1} = \int b\ (N_1(x)\ \delta\hat{u}_1 + N_2(x)\ \delta\hat{u}_2)\ dV_{ol}$$

pues:

$$\boxed{\delta u = N_1(x).\delta\hat{u}_1 + N_2(x).\delta\hat{u}_2}$$

por tanto:

$$\delta W_{ext}^{b_1} = \int b\ (N_1(x)\ \delta\hat{u}_1 + N_2(x)\ \delta\hat{u}_2)\ dV_{ol}$$

$$= \ \{\delta\hat{u}_1,\ \delta\hat{u}_2\} \begin{Bmatrix} \int N_1(x)\ b\, dV \\ \\ \int N_2(x)\ b\, dV \end{Bmatrix}$$

$$= \ \{\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} bA\ \ L_1 \\ \frac{1}{2} bA\ \ L_1 \end{Bmatrix}$$

que se puede escribir como:

$$\delta W_{ext}^{b_1} = \{\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2, \delta\hat{u}_3\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}bA\ \ L_1 \\ \frac{1}{2}bA\ \ L_1 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Análogamente, la contribución del segundo elemento será:

$$\delta W_{ext}^{b_2} = \{\delta\hat{u}_1, \hat{u}_2, \delta\hat{u}_3\} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2}bA\ \ L_2 \\ \frac{1}{2}bA\ \ L_2 \end{array} \right\}$$

siendo el trabajo total de las fuerzas de masa:

$$\delta W_{ext}^{b} = \delta W_{ext}^{b_1} + \delta W_{ext}^{b_2} = \{\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2, \delta\hat{u}_3\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}bA\ L_1 \\ \frac{1}{2}bA\ L_1 + \boxed{\frac{1}{2}bA\ L_2} \\ \boxed{\frac{1}{2}bA\ L_2} \end{array} \right\}$$

o bien

$$\delta W_{ext}^{b} = \delta \hat{\mathbf{u}}^{T} \mathbf{F_b}$$

donde $\mathbf{F}_{\mathrm{b}}$ es el vector de fuerzas nodales correspondiente al trabajo realizado por las fuerzas de masa, que puede interpretarse como el obtenido por "ensamblaje" de las contribuciones de cada elemento.

- El **trabajo de las fuerzas internas** se obtiene como la suma de las contribuciones de todos los elementos (en este caso 2):

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}^{(1)} + \delta W_{int}^{(2)}$$

siendo:

$$\delta W_{int}^{(1)} = (\delta \hat{u}_1, \delta \hat{u}_2)\ \mathbf{K}^{(1)} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta W_{int}^{(2)} = (\delta \hat{u}_2, \delta \hat{u}_3)\ \mathbf{K}^{(2)} \begin{pmatrix} \hat{u}_2 \\ \\ \hat{u}_3 \end{pmatrix}$$

que se pueden expresar como:

$$\delta W_{int}^{(1)} = (\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2, \delta\hat{u}_3) \begin{Bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{21}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\delta W_{int}^{(2)} = (\delta\hat{u}_1, \delta\hat{u}_2, \delta\hat{u}_3) \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}$$

siendo $\mathbf{K}^{(1)}$ y $\mathbf{K}^{(2)}$ las matrices de rigidez 2x2 correspondientes a los elementos 1 y 2.

El trabajo virtual será entones:

$$\delta W_{int} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \left\{ \begin{matrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & \left(K_{21}^{(1)} + K_{22}^{(2)}\right) & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{matrix} \right\} \hat{\mathbf{u}}$$

donde se puede observar cómo la matriz de rigidez global se forma a partir de las elementales $\mathbf{K}^{(1)}$ y $\mathbf{K}^{(2)}$. Así, el elemento (2,2) es la suma de las contribuciones correspondientes a ambos elementos.

Por tanto, tendremos:

$$\begin{Bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & (K_{21}^{(1)} + K_{22}^{(2)}) & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{31}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}bA\ L_1 \\ \frac{1}{2}bA\ L_1 + \frac{1}{2}bA\ L_2 \\ \frac{1}{2}bA\ L_2 \end{Bmatrix}$$

o bien:

$$\boxed{\mathbf{K}\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F} + \mathbf{F_b}}$$

que es la **expresión del sistema de ecuaciones obtenido por el Método de los Elementos Finitos (FEM)** al cual habrá que añadir las **condiciones de contorno en desplazamientos** para evitar que el movimiento del elemento sea el de un sólido rígido.

- **En la práctica**: notación local para los nodos de los elementos, y notación global para los del material:

Elemento 1

local	global
1	1
2	2

Elemento 2

local	global
1	2
2	3

y se emplea para las matrices de rigidez elementales la notación local. P.e. Para el elemento 2 los elementos de la matriz de rigidez serían:

$$\left\{ \begin{matrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{matrix} \right\}$$

De esta manera se simplifican mucho los cálculos, aunque para el ensamblaje se necesita conocer el nodo global al que pertenece uno local. Esta información se almacena en la llamada **matriz de conectividad** con tantas filas como elementos y tantas columnas como nodos por elemento, **almacenándose los nodos globales** de cada elemento por filas:

elem	n1	n2
1	1	2
2	2	3

(el elemento (2,1) cuyo valor es 2 indica que el primer nodo del segundo elemento es el nodo 2)

Generalización del método

Dado un fenómeno físico **cualquiera** (ya sea el estudio de un sólido elástico o cualquier otro fenómeno, estático o dinámico, ...) lo primero que habrá que hacer será plantear las ecuaciones en derivadas parciales que lo describan junto con las condiciones iniciales y de contorno. Una vez hecho esto, habrá que discretizar las ecuaciones para poder resolverlas por el Método de los Elementos Finitos.

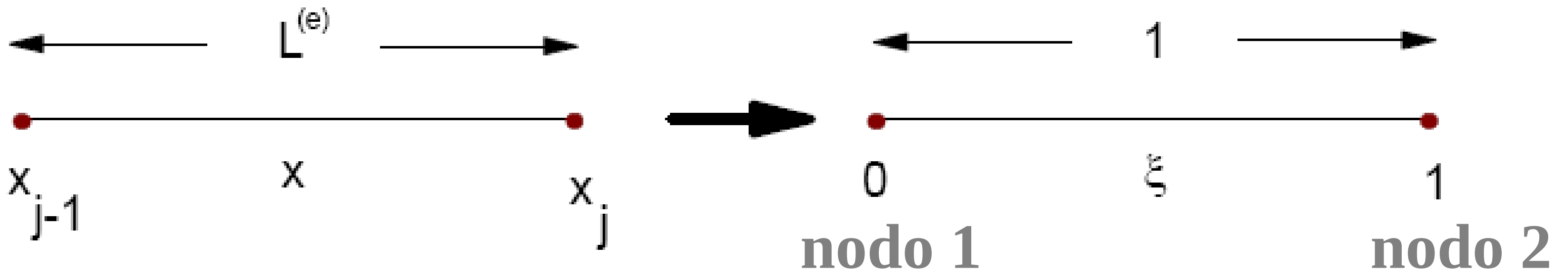
- **Problema continuo**: Ecuaciones en derivadas parciales (formulación fuerte)

$$
\begin{aligned}
-\Delta u = s \quad & en \quad \Omega \subset IR^2 \\
u = 0 \quad & sobre \quad \Gamma_D \ \text{(variable prescrita)} \\
\mathbf{n}\nabla u = g \quad & sobre \quad \Gamma_N \ \text{(flujo prescrito)}
\end{aligned}
$$

- **Problema discreto**: Método de los Elementos Finitos (FEM)

PASO 1: Discretización del dominio Ω en elementos

1D: Malla de elementos lineales 1D (también se podrían usar elementos de orden mayor p.e. cuadráticos)



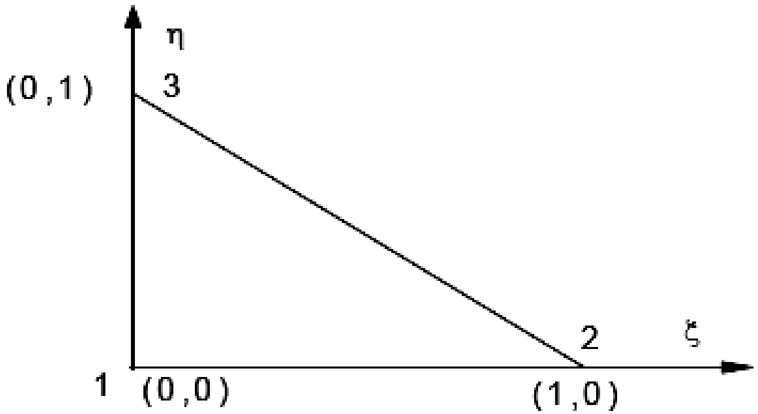
La funciones de forma en los nodos del **elemento isoparamétrico** serán:

$$N_1 = 1 - \xi \qquad N_2 = \xi$$

y podemos aproximar la función escalar $u(x,y)$ en el interior del elemento como:

$$u^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{2} N_i \hat{u}_i = \mathbf{N}^{(e)} \hat{\mathbf{u}}^{(e)}$$

2D: Malla de elementos triangulares lineales (T3) (otro tipo de elementos también es posible)



En este caso, las funciones de forma del **elemento isoparamétrico** serán:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta,\; N_2 = \xi,\; \text{y}\; N_3 = \eta.$$

y podemos aproximar la función escalar $u(x,y)$ en el interior del elemento como:

$$u^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i \hat{u}_i = \mathbf{N}^{(e)} \hat{\mathbf{u}}^{(e)}$$

donde:

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} N_1(\xi,\eta) & \dfrac{\partial}{\partial x} N_2(\xi,\eta) & \dfrac{\partial}{\partial x} N_3(\xi,\eta) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} N_1(\xi,\eta) & \dfrac{\partial}{\partial y} N_2(\xi,\eta) & \dfrac{\partial}{\partial y} N_3(\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

y como:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}$$

y $\quad dxdy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad$ siendo: $\quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$

tenemos que:

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

PASO 2: Formulación débil: El método de Galerkin

$$-\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \Delta u \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T s \, d\Omega$$

Aplicamos el teorema de Green:

Flujo prescrito

Flujo desconocido (variable prescrita)

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T s \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \nabla u \, d\Gamma$$

Utilizamos la aproximación $u \approx \sum_{i=1}^{N} N_i \hat{u}_i = \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}}$

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{N})^T \nabla \mathbf{N} \, d\Omega \, \hat{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T s \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T g \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \nabla u \, d\Gamma$$

$$\sum_{e=1}^{nelem} \left(\int_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{N}^e)^T \nabla \mathbf{N}^e \, d\Omega_e \, \hat{\mathbf{u}}^e \right) = \sum_{e=1}^{nelem} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{e^T} s \, d\Omega_e + \int_{\Gamma_N^e} \mathbf{N}^{e^T} g \, d\Gamma^e + \int_{\Gamma_D^e} \mathbf{N}^{e^T} \mathbf{n} \nabla u \, d\Gamma^e \right)$$

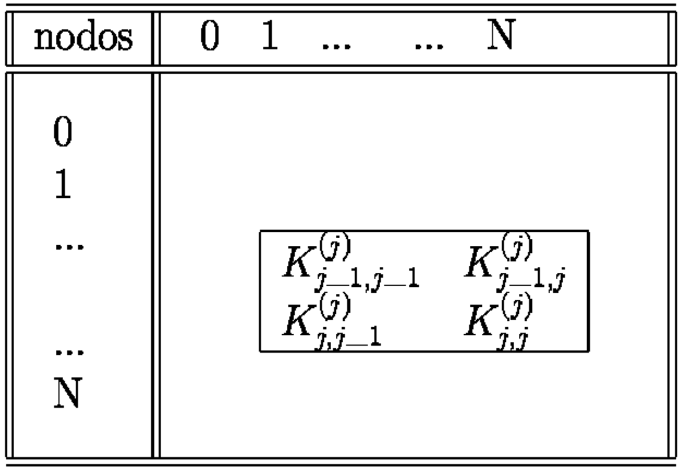
$$\Rightarrow \quad \sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{e^T} \mathbf{B}^e \, d\Omega \, \hat{\mathbf{u}}^e = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}^e$$

$$\boxed{\sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}^e \hat{\mathbf{u}}^e = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}^e}$$

siendo $\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{e^T} \mathbf{B} \, d\Omega_e$

PASO 3: Ensamblado

Para cada elemento, se calcula la matriz de rigidez $\mathbf{K}^e$ y el vector de fuerza $\mathbf{f}^e$, y a partir de ellos se calcula la **matriz de rigidez global K**



$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}^e$$

y el **vector de fuerza global**: $\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}^e$

PASO 4: Resolución del sistema

Se calculan los valores nodales resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente (+ C.I. + C.C.):

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$$