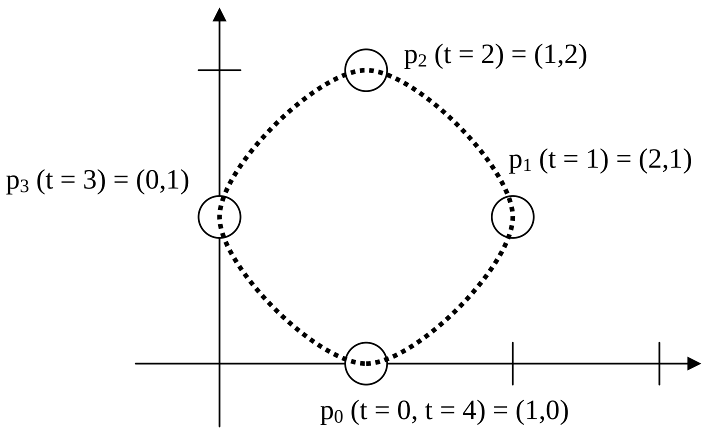
Solución del Control de Informática Gráfica - Noviembre 2010

Miguel A. Otaduy

1 Ejercicio de Curvas

1.1 Se ha de diseñar una curva cerrada que interpole 4 puntos con continuidad C^1 y con el menor grado posible. Como se muestra en la figura, los puntos a interpolar son $\mathbf{p}_0(t = 0) = (1, 0)$; $\mathbf{p}_1(t = 1) = (2, 1)$; $\mathbf{p}_2(t = 2) = (1, 2)$; $\mathbf{p}_3(t = 3) = (0, 1)$; y vuelta a $\mathbf{p}_0(t = 4) = (1, 0)$.



Nota: para obtener los coeficientes hay que resolver un sistema de ecuaciones. Será suficiente con dejar ese sistema indicado, no hay por qué resolverlo.

Decisión del tipo de curva:

Decidiremos el tipo de curva en función de las propiedades a cumplir:

1. Ha de interpolar. (Quedan descartadas Bézier y B-splines.)
2. Ha de ser del menor grado posible. (Entre las curvas que interpolan, la de menor grado posible es la spline.)
3. Ha de tener continuidad C^1. (Este nivel de continuidad se puede obtener con una spline cuadrática.)

Análisis del problema:

Una vez que hemos optado por la spline cuadrática, analizaremos su diseño. La curva spline viene dividida en tramos (4 tramos en nuestro caso), y en cada tramo utilizaremos un polinomio de grado 2 $x(t)$ para definir la coordenada x, y un polinomio de grado 2 $y(t)$ para definir la coordenada y. Las coordenadas x e y se pueden tratar completamente por separado.

Para la coordenada x, por cada tramo tendremos 3 coeficientes a calcular, es decir, un total de 12 incógnitas. Vamos a analizar cuántas condiciones de interpolación y continuidad podemos formular para así calcular las incógnitas. La interpolación de los 5 puntos, $\{\mathbf{p}_0(t = 0), \mathbf{p}_1(t = 1), \mathbf{p}_2(t = 2), \mathbf{p}_3(t = 3), \mathbf{p}_0(t = 4)\}$, define 2 condiciones de interpolación por tramo, es decir 8 condiciones. La continuidad de la primera derivada en los 4 puntos de unión de tramos define 4 condiciones más. Por lo tanto, tenemos 12 condiciones para 12 incógnitas, y el problema se puede resolver de manera exacta. En una curva abierta no habríamos tenido suficientes condiciones, pero la condición de continuidad en el punto donde se cierra la curva permite definir perfectamente el problema.

Este análisis de ecuaciones e incógnitas se podría hacer también para la coordenada y.

Definiciones de los polinomios y sus derivadas en cada tramo:

Primer tramo:

$$x = x_{10}t^2 + x_{11}t + x_{12} \qquad x' = 2x_{10}t + x_{11}$$
$$y = y_{10}t^2 + y_{11}t + y_{12} \qquad y' = 2y_{10}t + y_{11}$$

Segundo tramo:

$$x = x_{20}t^2 + x_{21}t + x_{22} \qquad x' = 2x_{20}t + x_{21}$$
$$y = y_{20}t^2 + y_{21}t + y_{22} \qquad y' = 2y_{20}t + y_{21}$$

Tercer tramo:

$$x = x_{30}t^2 + x_{31}t + x_{32} \qquad x' = 2x_{30}t + x_{31}$$
$$y = y_{30}t^2 + y_{31}t + y_{32} \qquad y' = 2y_{30}t + y_{31}$$

Cuarto tramo:

$$x = x_{40}t^2 + x_{41}t + x_{42} \qquad x' = 2x_{40}t + x_{41}$$
$$y = y_{40}t^2 + y_{41}t + y_{42} \qquad y' = 2y_{40}t + y_{41}$$

Condiciones de interpolación:

Primer tramo:

$$x(0) = 1 \Rightarrow x_{12} = 1 \qquad x(1) = 2 \Rightarrow x_{10} + x_{11} + x_{12} = 2$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow y_{12} = 0 \qquad y(1) = 1 \Rightarrow y_{10} + y_{11} + y_{12} = 1$$

Segundo tramo:

$$x(1) = 2 \Rightarrow x_{20} + x_{21} + x_{22} = 2 \qquad x(2) = 1 \Rightarrow 4x_{20} + 2x_{21} + x_{22} = 1$$
$$y(1) = 1 \Rightarrow y_{20} + y_{21} + y_{22} = 1 \qquad y(2) = 2 \Rightarrow 4y_{20} + 2y_{21} + y_{22} = 2$$

Tercer tramo:

$$x(2) = 1 \Rightarrow 4x_{30} + 2x_{31} + x_{32} = 1 \qquad x(3) = 0 \Rightarrow 9x_{30} + 3x_{31} + x_{32} = 0$$
$$y(2) = 2 \Rightarrow 4y_{30} + 2y_{31} + y_{32} = 2 \qquad y(3) = 1 \Rightarrow 9y_{30} + 3y_{31} + y_{32} = 1$$

Cuarto tramo:

$$x(3) = 0 \Rightarrow 9x_{40} + 3x_{41} + x_{42} = 0 \qquad x(4) = 1 \Rightarrow 16x_{40} + 4x_{41} + x_{42} = 1$$
$$y(3) = 1 \Rightarrow 9y_{40} + 3y_{41} + y_{42} = 1 \qquad y(4) = 0 \Rightarrow 16y_{40} + 4y_{41} + y_{42} = 0$$

Condiciones de continuidad de derivadas:
Primer y segundo tramos:

$$x'(1) \Rightarrow 2x_{10} + x_{11} = 2x_{20} + x_{21}$$
$$y'(1) \Rightarrow 2y_{10} + y_{11} = 2y_{20} + y_{21}$$

Segundo y tercer tramos:

$$x'(2) \Rightarrow 4x_{20} + x_{21} = 4x_{30} + x_{31}$$
$$y'(2) \Rightarrow 4y_{20} + y_{21} = 4y_{30} + y_{31}$$

Tercer y cuarto tramos:

$$x'(3) \Rightarrow 6x_{30} + x_{31} = 6x_{40} + x_{41}$$
$$y'(3) \Rightarrow 6y_{30} + y_{31} = 6y_{40} + y_{41}$$

Cuarto y primer tramos:

$$x'(4) = x'(0) \Rightarrow 8x_{40} + x_{41} = x_{11}$$
$$y'(4) = y'(0) \Rightarrow 8y_{40} + y_{41} = y_{11}$$

Sistema de ecuaciones completo en x:

$$\begin{aligned}
x_{12} &= 1 \\
x_{10} + x_{11} + x_{12} &= 2 \\
x_{20} + x_{21} + x_{22} &= 2 \\
4x_{20} + 2x_{21} + x_{22} &= 1 \\
4x_{30} + 2x_{31} + x_{32} &= 1 \\
9x_{30} + 3x_{31} + x_{32} &= 0 \\
9x_{40} + 3x_{41} + x_{42} &= 0 \\
16x_{40} + 4x_{41} + x_{42} &= 1 \\
2x_{10} + x_{11} &= 2x_{20} + x_{21} \\
4x_{20} + x_{21} &= 4x_{30} + x_{31} \\
6x_{30} + x_{31} &= 6x_{40} + x_{41} \\
8x_{40} + x_{41} &= x_{11}
\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones completo en y:

$$
\begin{aligned}
y_{12} &= 0 \\
y_{10} + y_{11} + y_{12} &= 1 \\
y_{20} + y_{21} + y_{22} &= 1 \\
4y_{20} + 2y_{21} + y_{22} &= 2 \\
4y_{30} + 2y_{31} + y_{32} &= 2 \\
y_{30} + 3y_{31} + y_{32} &= 1 \\
9y_{40} + 3y_{41} + y_{42} &= 1 \\
16y_{40} + 4y_{41} + y_{42} &= 0 \\
2y_{10} + y_{11} &= 2y_{20} + y_{21} \\
4y_{20} + y_{21} &= 4y_{30} + y_{31} \\
6y_{30} + y_{31} &= 6y_{40} + y_{41} \\
8y_{40} + y_{41} &= y_{11}
\end{aligned}
$$

1.2 La curva del apartado anterior carece de una propiedad deseada. Identifica esa propiedad. Indica otros posibles tipos de curvas con los que sí se obtendría esa propiedad, e identifica qué propiedad se perdería en ese caso.

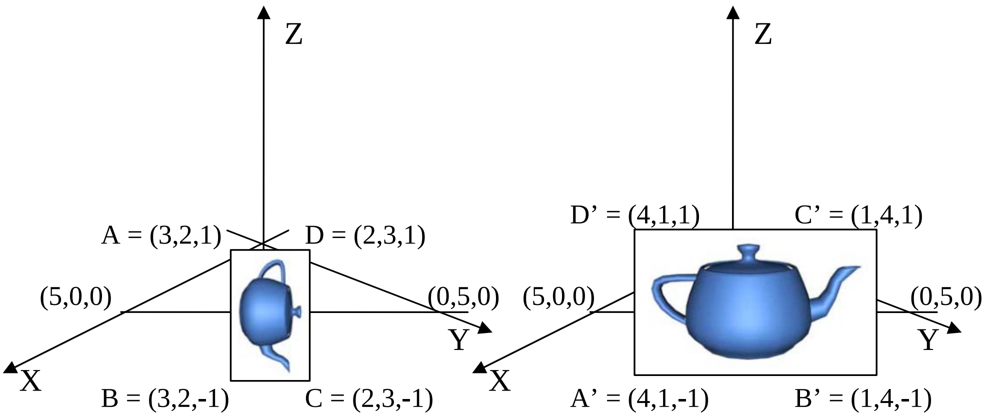
La spline cuadrática carece de **control local**. Esto implica que cambiar un punto de control afecta a toda la curva.

Se podrían usar curvas cúbicas (p.ej. Hermite). En ese caso se perdería la propiedad de grado mínimo, pasando a ser 3, con el consiguiente riesgo de oscilaciones. Si se quiere usar Hermite, hay que tener cuidado, porque no se puede hacer una simple asignación de parámetros $x = t$. El problema es que la curva es cerrada. Si se quiere usar Hermite, hay que hacer el diseño de $x(t)$ e $y(t)$ por separado, igual que con la spline cuadrática, pero definiendo distintas condiciones sobre las derivadas.

Se podrían usar B-splines cuadráticas. En ese caso se perdería la propiedad de interpolación. Se podría conseguir interpolación en los extremos asignando nodos de la B-spline de la manera adecuada, pero en los puntos de control interiores sólo se conseguiría aproximación.

2 Ejercicio de Transformaciones

2.1 El rectángulo con textura de tetera de la imagen de la izquierda se ha de transformar para que esté posicionado como en la imagen de la derecha. La posición del centro de la textura es en ambas imágenes (2.5, 2.5, 0), y el rectángulo de la textura está colocado en ambas imágenes en el plano normal al vector (1, 1, 0), pero la orientación y la escala han cambiado.



Nota: utilizar dibujos que ayuden a aclarar los distintos pasos efectuados. No es necesario efectuar las multiplicaciones entre matrices al expresar la transformación final, es suficiente con expresar cada matriz y dejar el producto indicado.

Análisis del problema:

Para posicionar la textura como en la imagen final, hay dos transformaciones clave que se deben aplicar: rotación de 90 grados alrededor del eje XY, y escalado. Para realizar estas dos operaciones clave, realizaremos otra serie de transformaciones auxiliares: Por un lado, como el eje XY no es uno de los ejes cartesianos, primero alinearemos el eje XY con uno de los ejes cartesianos, realizaremos la rotación de 90 grados sobre ese eje, y luego desharemos la rotación inicial. Por otro lado, como el escalado se ha de realizar respecto al origen, primero trasladaremos la textura para centrarla en el origen de coordenadas, realizaremos el escalado allí, y luego desharemos la traslación.

La secuencia de transformaciones seleccionada ha sido:

1. $\mathbf{R}_1$: Rotar -45 grados alrededor del eje Z para alinear el eje XY con el eje X.

2. $\mathbf{T}_2$: Trasladar al origen.

3. $\mathbf{R}_3$: Rotar 90 grados alrededor del eje X.

4. $\mathbf{S}_4$: Escalar.

5. $\mathbf{T}_5$: Deshacer la traslación $\mathbf{T}_2$. $\mathbf{T}_5 = \mathbf{T}_2^{-1}$.

6. $\mathbf{R}_6$: Deshacer la rotación $\mathbf{R}_1$. $\mathbf{R}_6 = \mathbf{R}_1^{-1}$.

La transformación completa es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_6\mathbf{T}_5\mathbf{S}_4\mathbf{R}_3\mathbf{T}_2\mathbf{R}_1$$

Hay muchas otras opciones para resolver el problema:

- Se puede alinear el eje XY con el eje Y en lugar del X.
- Se puede rotar para alinear antes de trasladar al origen.
- Se puede trasladar un vértice de la textura al origen en lugar de su centro, pero entonces hay que tener cuidado al deshacer esta traslación. El escalado hace que la traslación final no sea simplemente la inversa de la inicial.

Otras cuestiones importantes a tener en cuenta son que el escalado se ha de realizar en el origen, no se puede escalar en el lugar donde se encuentra la textura. Y los escalados no son uniformes y se han de calcular.

Rotación $\mathbf{R}_1$:

Rotación de -45 grados alrededor del eje Z:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos -45 & -\sin -45 & 0 & 0 \\ \sin -45 & \cos 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt(2)/2 & \sqrt(2)/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt(2)/2 & \sqrt(2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traslación $\mathbf{T}_2$:

El punto (2.5, 2.5, 0) queda en (2.5 $\sqrt(2)$, 0, 0) después de la primera rotación. Se ha de trasladar ese punto al origen:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2.5\sqrt(2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotación $\mathbf{R}_3$:

Rotación de 90 grados alrededor del eje X:

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ 0 & \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalado $\mathbf{S}_4$:

La textura original tiene tamaño 2 en el lado ancho y $\sqrt(2)$ en el lado estrecho. La textura final tiene tamaño $3\sqrt(3)$ en el lado ancho y 2 en el lado estrecho. Dada la orientación actual de la textura, requiere un escalado de $\sqrt(2)$ en el eje Z y $3/2\sqrt(2)$ en el eje Y. En el eje X se deja como está (escalado 1).

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2\sqrt(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traslación T_5:
$\mathbf{T}_5 = \mathbf{T}_2^{-1}$. Se consigue cambiando de signo al vector de traslación:

$$\mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.5\sqrt(2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotación R_6:
$\mathbf{R}_6 = \mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{R}_1^T$:

$$\mathbf{R}_6 = \begin{pmatrix} \sqrt(2)/2 & -\sqrt(2)/2 & 0 & 0 \\ \sqrt(2)/2 & \sqrt(2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$