Geometría afín.
Transformaciones geométricas.

Índice

1. Introducción

1. Espacios vectoriales
2. Espacios afínes. Puntos. Suma afín
3. Espacios euclídeos. Distancia. Producto escalar. Ortogonalidad y proyecciones. Producto vectorial
4. Representación de líneas y planos.
5. Otros conceptos: envoltura convexa, primitivas 3D, etc.

Espacio vectorial

- Un espacio vectorial se compone de escalares y vectores.
- Definimos las operaciones de suma (escalar y vectorial) y multiplicación escalar-escalar y escalar-vector
- Son operaciones cerradas: sumar dos vectores o multiplicar escalares por vectores nos dan otros vectores
- Además, existen elementos neutro e inverso.
- La multiplicación escalar-vector es distributiva respecto a la suma de escalares y a la suma de vectores

Ejemplos: vectores geométricos, grupos o tuplas de reales en R^n, etc.

Espacio vectorial

Otros conceptos de interés:

- Combinación lineal de vectores
- Independencia lineal
- Dimensión del espacio vectorial
- Bases de un espacio vectorial
- Representación de vectores en función de una base: coordenadas
- Cambio de coordenadas (atención a la relación entre cambio de bases y cambio de coordenadas; se basan en la transformación inversa)

Espacios afines

Los espacios vectoriales carecen de conceptos como posición y distancia (tenemos vectores, con magnitud y dirección, pero no están fijos a un punto). Tampoco podemos definir un origen.

En los espacios afines nos aparece otra entidad: los “puntos”

- El espacio afín es un espacio vectorial que además permite definir posiciones en el espacio (= **puntos**).
- Los vectores unen puntos. Indican cuál es la dirección que hay que seguir desde un punto “origen” a otro punto “destino”, e indican la longitud del camino que hay que recorrer.

Por tanto, en un espacio afín tenemos escalares, vectores (nos definen direcciones y desplazamientos) y puntos, que nos especifican posiciones en el espacio

Espacios afines (2)

Definimos dos operaciones nuevas:

- Substracción de puntos **P-Q**: origina el vector v que va de **Q** a **P**
- Adición punto-vector: en el caso anterior, **P** = **Q** + v
- No está definida la suma de puntos (aunque sí un tipo especial de suma que llamaremos *suma afín*)
- Esto nos permite definir una base en el espacio afín, constituida por un origen **O** y una base del espacio vectorial asociado

Espacios afines (2)

- El espacio afín es un espacio vectorial que además permite definir posiciones en el espacio (= **puntos**).
- Los vectores unen puntos. Indican cuál es la dirección que hay que seguir desde un punto "origen" a otro punto "destino", e indican la longitud del camino que hay que recorrer.

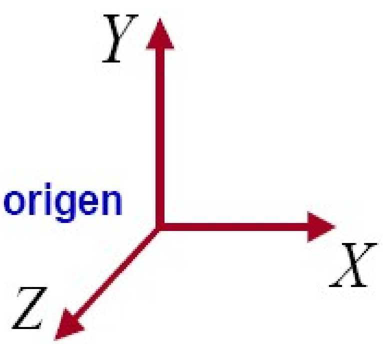
Por tanto, en un espacio afín tenemos escalares, vectores (nos definen direcciones y desplazamientos) y puntos, que nos especifican posiciones en el espacio

Sistema de referencia

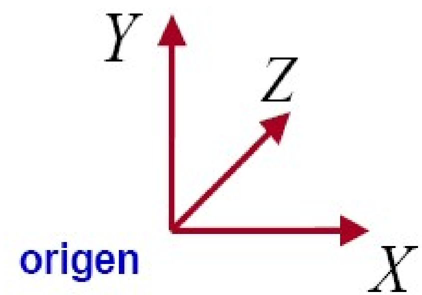
Un sistema de referencia consta de:

Base + Punto

a derechas
RHS: right handed system



a izquierdas
LHS: left handed system



Sistemas de referencia (espacio afín)

Necesitamos un punto (**O**, origen) y una base del espacio vectorial ($\underline{i}$, $\underline{j}$ y $\underline{k}$)

Cada punto y vector tiene una representación única. Por ejemplo, para 3D:

- Vectores: $\underline{v} = x \, . \, \underline{i} + y \, . \, \underline{j} + z \, . \, \underline{k}$ ($\underline{i}$, $\underline{j}$ y $\underline{k}$ son vectores unitarios en las direcciones de los ejes X, Y y Z)
- Puntos: $\mathbf{P} = a \, . \, \underline{v} + \mathbf{O} = a\,x \, . \, \underline{i} + a\,y \, . \, \underline{j} + a\,z \, . \, \underline{k} + \mathbf{O}$
- Se pueden utilizar sus coordenadas, que para el vector $\underline{v}$ serían (x, y, z, 0), y para el punto **P**, (a x, a y, a z, 1)
  NOTA: representamos un punto 3D por **4 coordenadas**
- Se pueden tomar los vectores como equivalentes a un punto en el infinito (lo estudiaremos al ver las coordenadas homogéneas)

Espacios euclídeos

Necesitamos todavía otros conceptos, como los de distancia y ortogonalidad. Para ello, definimos el *producto escalar* de vectores:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\theta)$$

(θ: ángulo formado por $\underline{u}$ y $\underline{v}$)

Propiedades del producto escalar:

- Conmutativa y asociativa (respecto a la suma de vectores y multiplicación por un escalar)
- Si $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \cdot \underline{v} > 0$; $\underline{0} \cdot \underline{0} = 0$
- Si $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$ y $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ambos vectores son ortogonales
- El producto escalar nos permite calcular la distancia entre dos puntos (mediante el producto escalar del vector que los une) y el ángulo entre dos vectores

Espacios euclídeos (2)

El producto escalar nos permite:

- Calcular la distancia entre dos puntos (mediante el producto escalar del vector que los une) y el ángulo entre dos vectores
- Descomponer un vector $\underline{u}$ en sus componentes paralela y ortogonal a otro $\underline{v}$ (si tomamos un vector unitario en la dirección de $\underline{v}$, su producto escalar con $\underline{u}$ nos da la proyección de $\underline{u}$ sobre $\underline{v}$ y su diferencia con $\underline{u}$, nos da su componente ortogonal a $\underline{v}$
- Hallar la mínima distancia entre un punto y una recta (podemos descomponer el vector que une el punto en cuestión con cualquiera de los de la recta en la componente normal al vector colineal con la recta)

Otros conceptos

- Producto vectorial de dos vectores: Nos permite obtener otro vector normal al plano definido por los otros dos

  Módulo: $| \underline{u} \times \underline{v} | = | \underline{u} | \cdot | \underline{v} | \cdot \operatorname{sen}(\theta)$

  Dirección: perpendicular al plano definido por $\underline{u}$ y $\underline{v}$

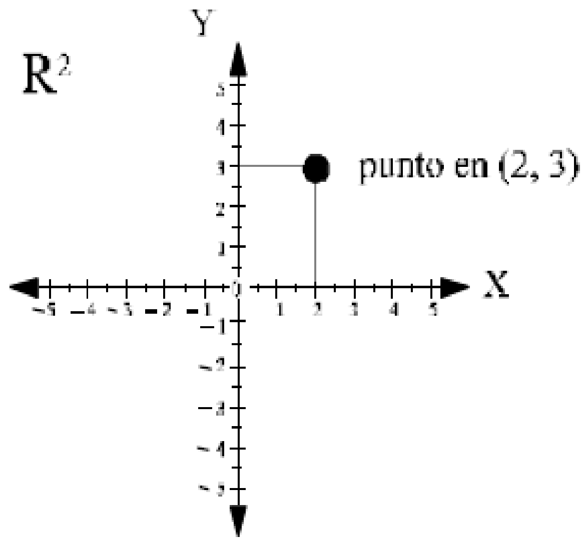
  Sentido: regla del "sacacorchos"
- Sumas afines. Representación de segmentos y polígonos convexos
- Envolturas convexas
- Ecuaciones de líneas y planos
- Tratamiento de otras primitivas 3D (líneas y superficies curvas)

Índice

- Introducción: Espacios vectoriales, afínes y euclídeos.
- **Transformaciones en el espacio afín.**
- Composición de transformaciones.
- Comentarios

2. Transformaciones en el espacio afín 2D

Sistema de referencia en 2D:



Puntos y vectores: se representan mediante dos o tres coordenadas:

- **P**: (x, y, 1) o bien (x, y)
- <u>v</u>: (x, y, 0) o bien (x, y)

2.1 Transformaciones: introducción

- En general, una transformación T es una función que nos cambia un punto **Q** o un vector $\underline{v}$ en otro punto **P** o en otro vector $\underline{u}$: $\mathbf{P} = T(\mathbf{Q})$; $\underline{u} = T(\underline{v})$
- En general, una transformación cualquiera debería ser aplicada punto a punto a todos los puntos de una escena
- Una transformación es lineal si verifica que $T(a.x + b.y) = aT(x) + bT(y)$
- Si una transformación es lineal, transforma líneas y planos en líneas y planos (por tanto, bastaría transformar 2 o 3 puntos para tener las rectas o planos transformados)
- Podremos expresar las transformaciones lineales aplicadas a puntos o vectores por los productos de sus coordenadas con matrices
- Las transformaciones que nos interesan más son lineales (traslaciones, rotaciones, escalados, etc)
- Grados de libertad en 3D: 9 para transformar vectores (tres rotaciones), 12 para transformar puntos (tres rotaciones más una traslación)

Coordenadas homogéneas

- Representamos elementos del plano 2D por tres coordenadas: $(x\ y\ w)^T$
- Representamos elementos del espacio 3D por cuatro coordenadas: $(x\ y\ z\ w)^T$
- En principio, w será igual a 1; si no lo fuese, podemos dividir por w, ya que tomaremos $(wx\ wy\ wz\ w)^T = (x\ y\ z\ 1)^T$
- En los vectores, w = 0 (nos indica que es un punto en el infinito, que nos da una dirección. Incluso podemos hablar de un *plano en el infinito* que contiene a todos los puntos de w nula
- *Tener w permitirá también considerar la transformación de perspectiva*

Coordenadas homogéneas (2)

- Queremos poder expresar cualquier transformación afín mediante un producto por una matriz de transformación (en coordenadas cartesianas, una traslación requiere una suma; en coordenadas homogéneas también podemos representar traslaciones mediante productos por matrices de transformación)
- Podemos representar de forma homogénea puntos y vectores
- Permitirá también multiplicar por una matriz para proyectar en perspectiva (podríamos por tanto utilizar una única matriz que pasase de coordenadas locales a coordenadas de pantalla)

2.2 Transformaciones de objetos o de sistemas de referencia

- Cuando queramos transformar la posición, orientación y escala de los objetos de la escena, podemos plantearlo de dos maneras:
  - Como una transformación aplicada a cada uno de los objetos
  - Como una transformación aplicada al sistema de referencia
- Cada una de ellas es más conveniente en algunas circunstancias. Ej.: componer una escena requiere trasladar objetos desde sus sistemas de coordenadas locales; referirlos a una posición nueva de la cámara es más sencillo si asociamos la posición del sistema de referencia a la cámara y lo movemos con ella

2.2 Transformaciones de objetos o de sistemas de referencia (2)

- Hay que tener en cuenta que modificar la posición del sistema de referencia requiere hacer la modificación inversa que la que necesitamos para modificar la posición de cada uno de los objetos (recordar lo dicho para cambios de bases en espacios vectoriales).
- Dado que el orden en el que se realizan las operaciones afecta al resultado final, hay que tener también cuidado de que las operaciones que realizamos se hagan en el orden correcto tanto si modificamos la posición de los objetos como si modificamos la del sistema de referencia

2.3 Transformaciones afines

- Cambian puntos o vectores en puntos o vectores, lo que permite transformar la escena punto a punto **(muy costoso)**.
- Transforman rectas y planos en rectas y planos. Por tanto, si modelamos los objetos mediante mallas de polígonos, podemos transformar los vértices de la malla y dibujar las aristas y facetas que los unen **(mucho más simple)**
- Tipos de transformaciones afines:
  - Traslación
  - Rotación
  - Escalado
  - Cizallado (también llamado sesgo; *shear* en inglés)
  - Reflexión

2.3.1 Traslación:

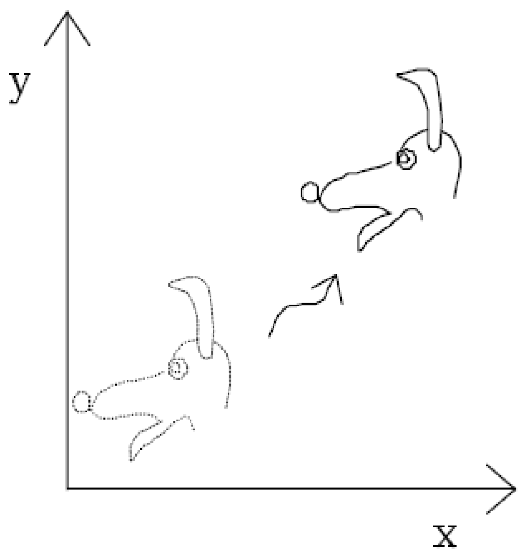
La posición final P' se calcula sumando a P un *vector de traslación* T.

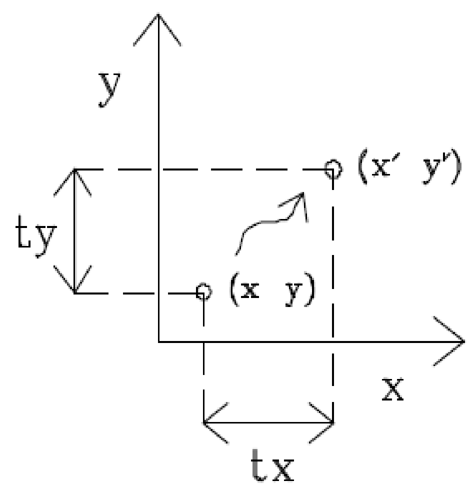
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$$

$$x' = x + d_x$$
$$y' = y + d_y$$

Expresión matricial (en cartesianas):

$P' = P+T$





Traslación:

Desplazamos el origen y los ejes (o los objetos) de forma paralela. En dos y tres dimensiones lo expresamos de la siguiente manera, siendo dx, dy, dz las distancias de traslación:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se preservan distancias y ángulos; es una transformación de sólido rígido

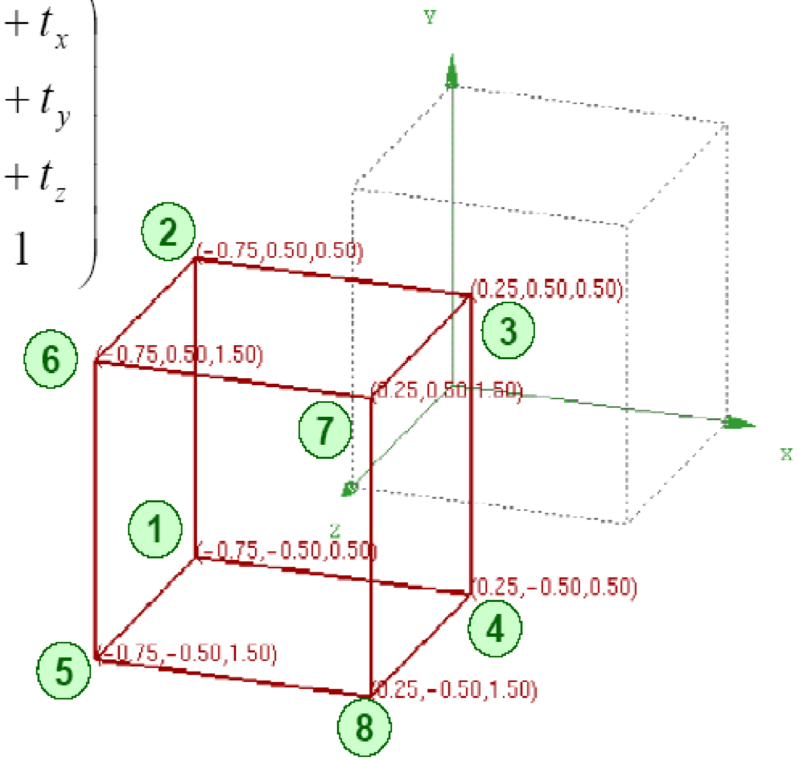
Traslación en 3D:

Se traslada también siempre de forma paralela

- **Traslación**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformación
de *sólido-rígido*

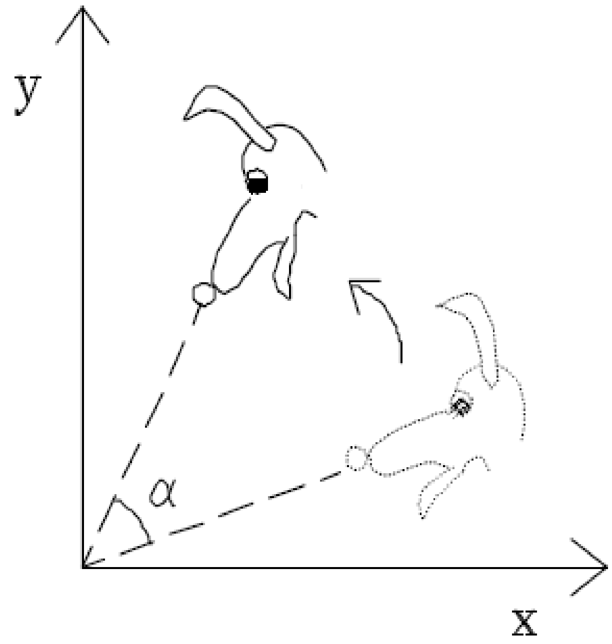


2.3.2 Rotación

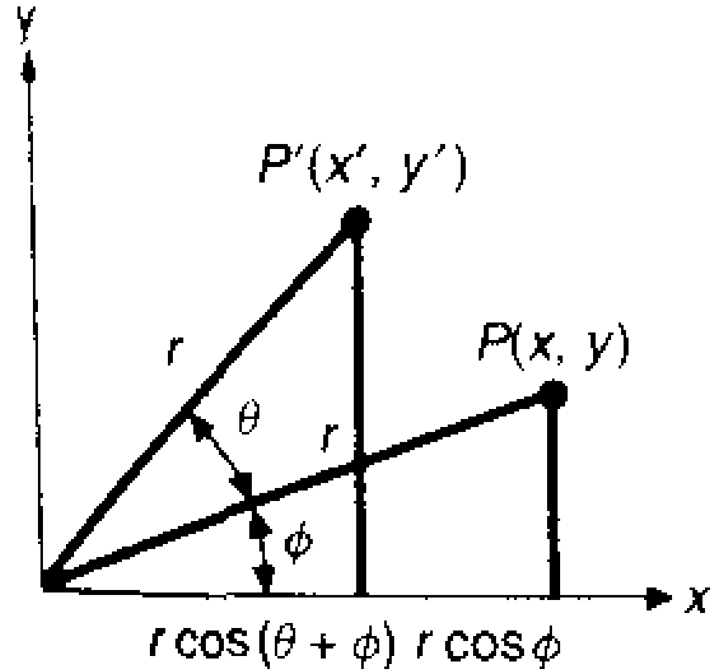
En dos dimensiones: si giramos el objeto un ángulo (positivo si gira en sentido anti-horario)

Parámetros que nos definen la rotación:

- Ángulo de rotación
- Sentido (signo del ángulo)
- Centro de rotación



Rotación (2)



En dos dimensiones:

$x' = r \cdot \cos(\theta + \phi) = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi - r \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi = x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\phi$

$y' = r \cdot \text{sen}(\theta + \phi) = r \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\phi + r \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\phi = x \cdot \text{sen}\phi + y \cdot \cos\theta$

$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \text{sen}\theta$

$y' = x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$

Rotación (3)

En dos dimensiones, en coordenadas homogéneas, si giramos los ejes un ángulo (positivo si gira en sentido anti-horario)

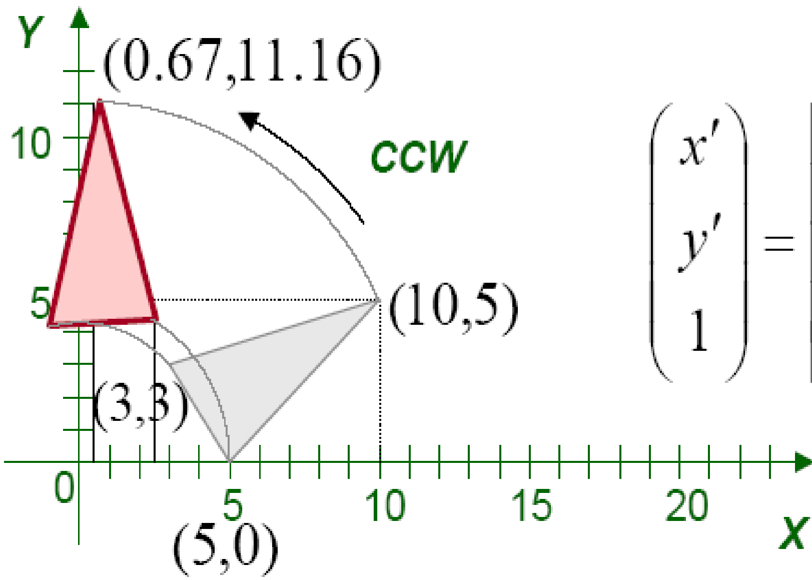
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Las matrices de rotación son ortogonales; su transpuesta es su inversa.
- Las rotaciones son transformaciones de sólido rígido también: conservan ángulos y distancias

Rotación (4)

- **Rotación respecto al origen**

$$\theta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.866 \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2} = 0.5 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotación (5)

En tres dimensiones: ahora tenemos tres rotaciones diferentes respecto cada uno de los ejes coordenados (igualmente, consideramos sentido positivo si gira en sentido anti-horario)

La rotación sobre Z es prácticamente igual que antes, aunque ahora tenemos que usar una matriz (3x3):

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación (6)

Para la rotación sobre X, también es prácticamente igual que antes, solamente que el eje que antes era X será ahora Y, y el que antes era Y, Z (igualmente, consideramos sentido positivo si gira en sentido anti-horario)

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación (7)

Si rotamos respecto de Y, lo que en R_z era X ahora será Z, y donde teníamos Y, ahora habrá que poner Z. Por tanto hay que intercambiar también filas y columnas en la matriz de rotación...

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Escalado uniforme y no uniforme

Variamos la escala en los ejes coordenados con el mismo factor de escala o diferente para cada eje

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Espacio afín 2D: cambio de escala

Esta operación modifica la distancia de los puntos sobre los que se aplica respecto de un punto de referencia.

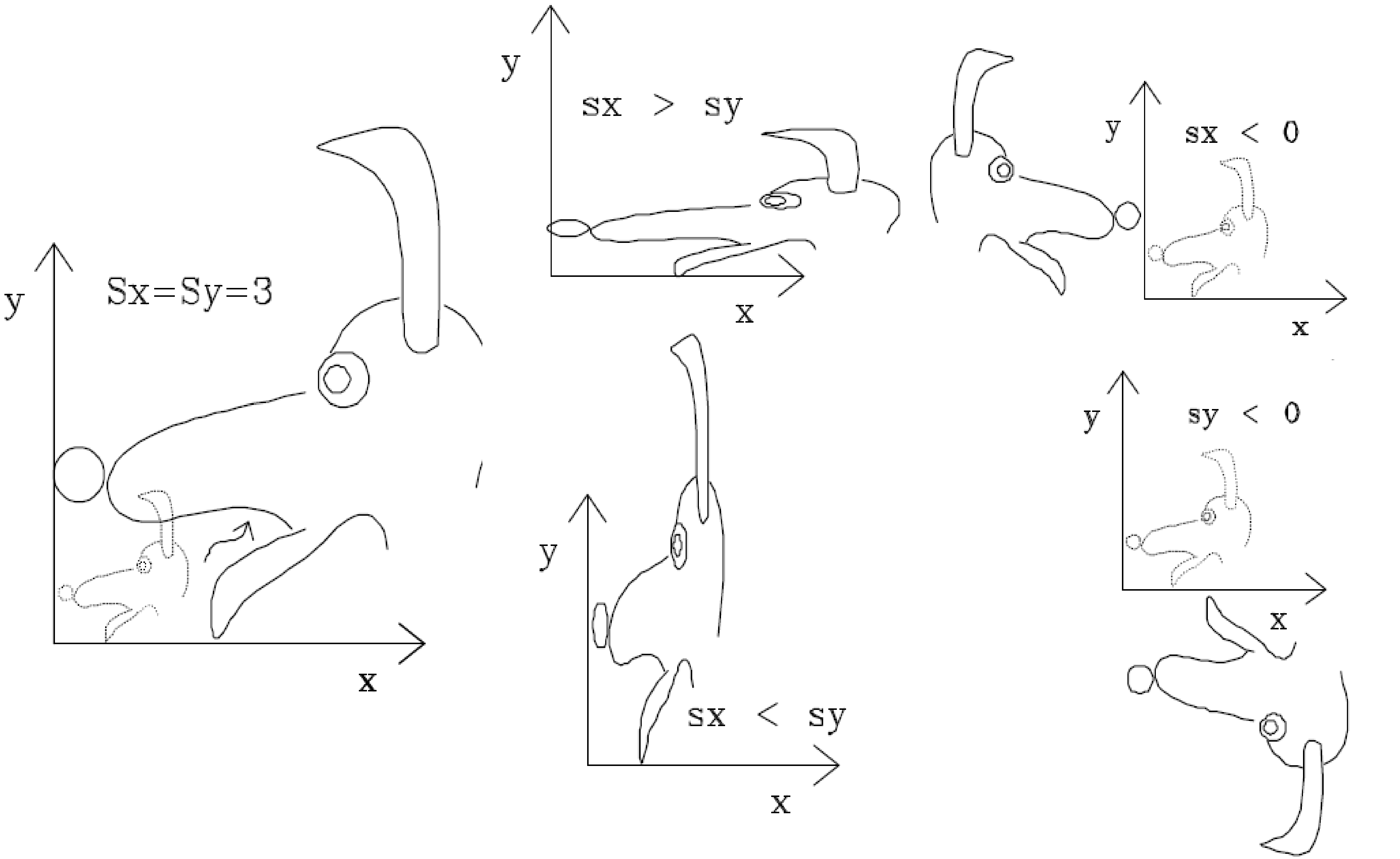
Elementos en un cambio de escala:

- **Factor de escala en x: s_x.**
- **Factor de escala en y: s_y.**

Tipos de cambios de escala:

- **Uniforme: $s_x = s_y$.**
- **No uniforme: $s_x <> s_y$.**

Espacio afín 2D: cambio de escala



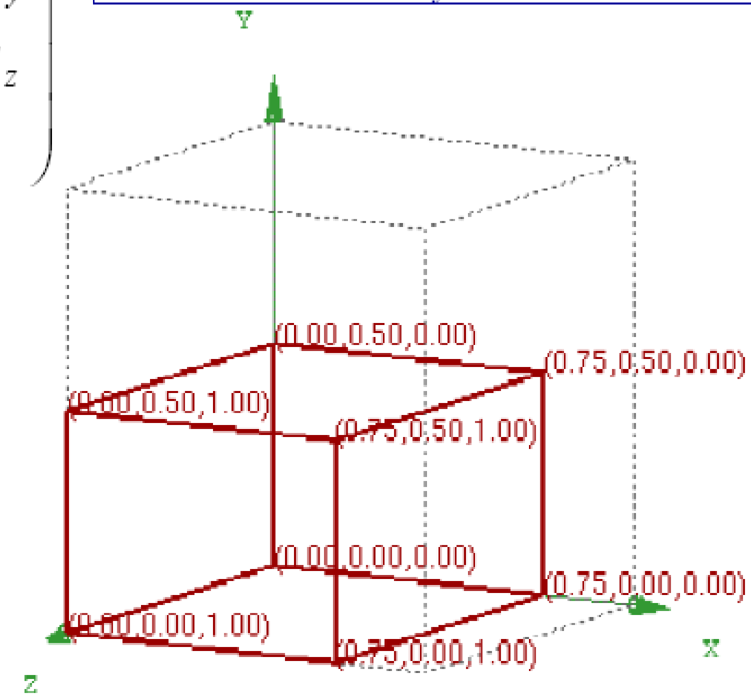
Transformaciones afines 3D

- **Escalado**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xs_x \\ ys_y \\ zs_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se preservan ángulos
si es uniforme
$s_x = s_y = s_z$

$$s_x = 0.75$$
$$s_y = 0.5$$
$$s_z = 1.0$$



2.3.4 Cizallado

- No mantiene los ángulos, aunque sí las rectas y el paralelismo
- Menos utilizada en gráficos
- En tres dimensiones es análoga, si bien nos aparecen nuevos coeficientes adicionales

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espacio afín 2D: cizallado o sesgo

Esta operación cambia la forma de los objetos distorsionándola.

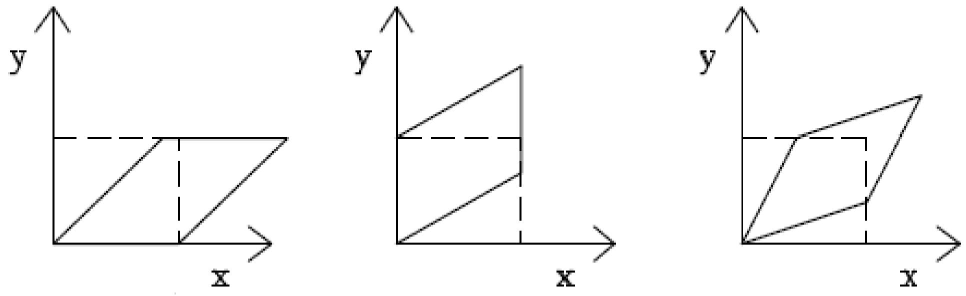
Elementos:

- **Factor de cizalla en x: h_x.**
- **Factor de cizalla en y: h_y.**

Tipos de sesgo:

- **A lo largo del eje X: $h_x <> 0$, $h_y = 0$.**
- **A lo largo del eje Y: $h_x = 0$, $h_y <> 0$.**
- **Compuesto: $h_x <> 0$, $h_y <> 0$.**

Espacio afín 2D: sesgo



Expresiones:

$$x' = x + y * h_x$$

$$y' = y + x * h_y$$

En forma matricial:

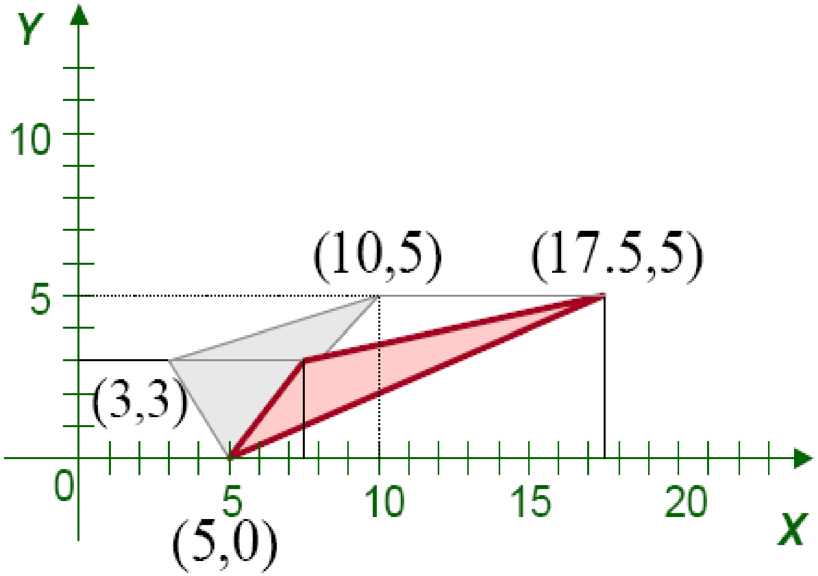
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_x \\ h_y & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P' = SH * P$$

Transformaciones afines 2D

- **Sesgo (o *cizallado*) en X** *Shearing along **X***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yh_x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

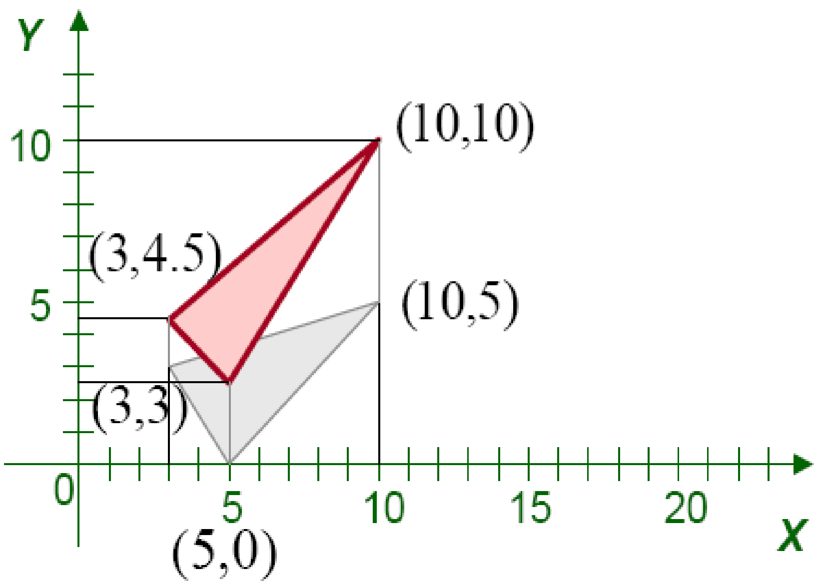


$$h_x = 1.5$$

Transformaciones afines 2D

- **Sesgo** (o ***cizallado***) **en Y** *Shearing along Y*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + xh_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

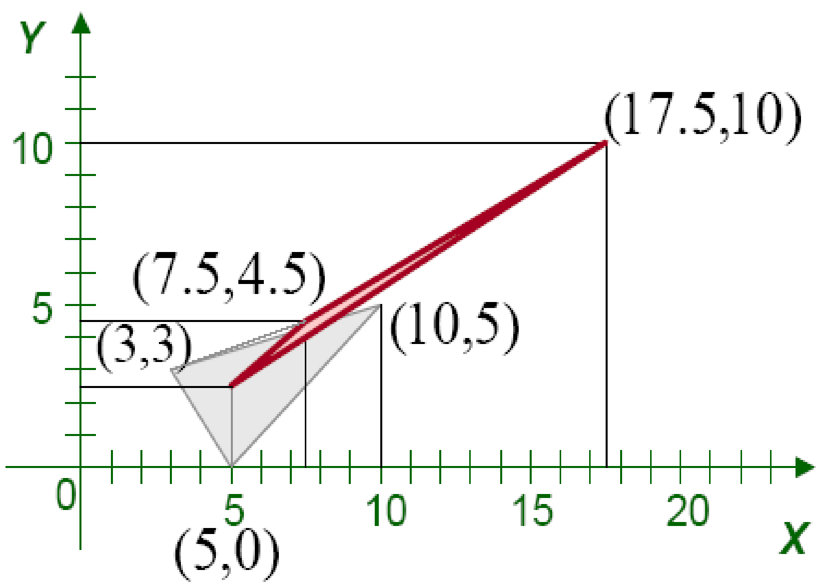


$$\boxed{h_y = 0.5}$$

Transformaciones afines 2D

- **Sesgo** (o *cizallado*) compuesto *Shearing*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_x & 0 \\ h_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yh_x \\ y + xh_y \\ 1 \end{pmatrix}$$



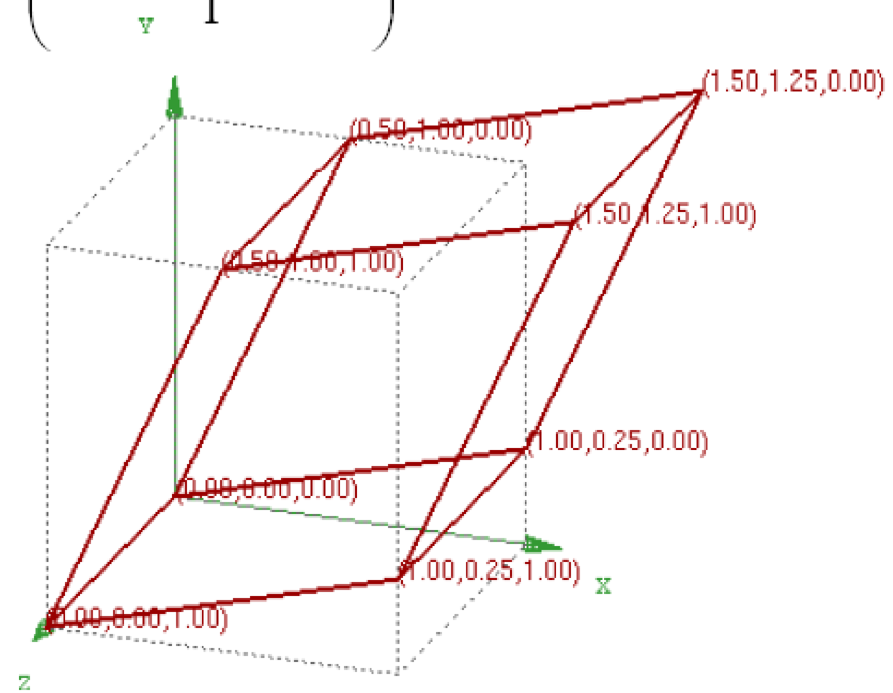
$$h_x = 1.5$$
$$h_y = 0.5$$

Transformaciones afines 3D

- **Sesgo**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_{xy} & h_{xz} & 0 \\ h_{yx} & 1 & h_{yz} & 0 \\ h_{zx} & h_{zy} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + yh_{xy} + zh_{xz} \\ xh_{yx} + y + zh_{yz} \\ xh_{zx} + yh_{zy} + z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{xy} = 0.5$$
$$h_{yx} = 0.25$$
$$h_{xz} = h_{yz} = h_{zx} = h_{zy} = 0$$



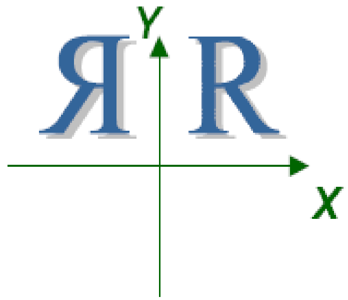
Los demás combinaciones de sesgos son similares

Transformaciones afines 2D

- **Reflexión** *Reflection*

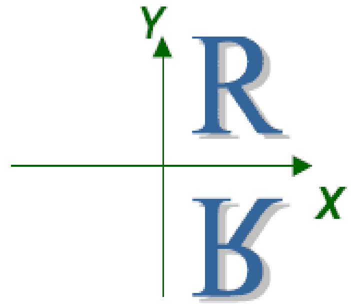
reflexión
respecto al eje X

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



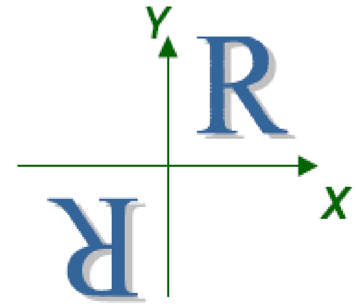
reflexión
respecto al eje Y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



reflexión
respecto al origen

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Se preservan las distancias

No son transformaciones *sólido-rígido*

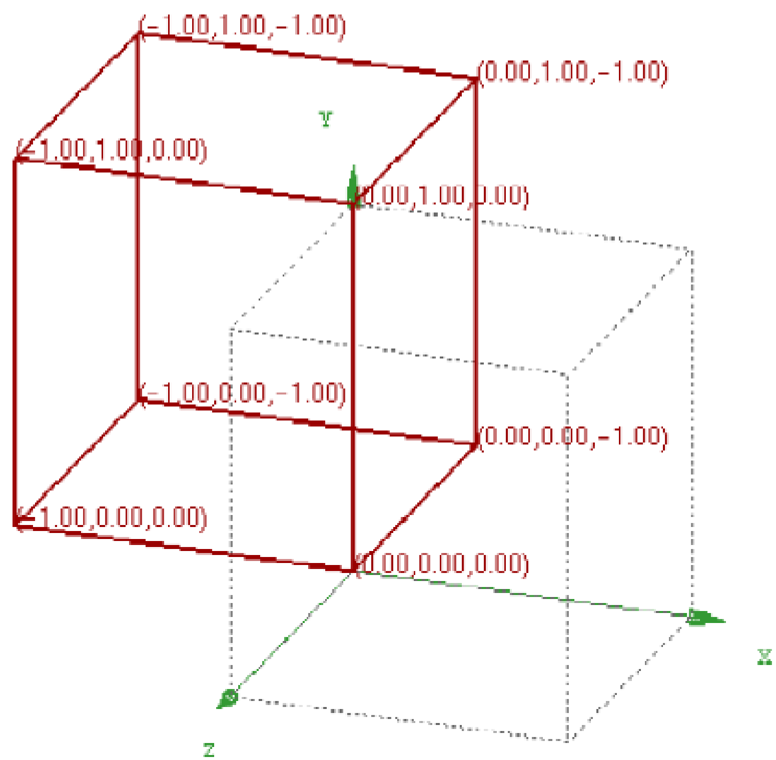
Transformaciones afines 3D

- **Reflexión**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xs_x \\ ys_y \\ zs_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se preservan distancias

$$\boxed{\begin{aligned} s_x &= -1 \\ s_y &= 1 \\ s_z &= -1 \end{aligned}}$$



Las demás reflexiones son similares

Índice

- Introducción: Espacios vectoriales, afínes y euclídeos.
- Transformaciones en el espacio afín.
- **Composición de transformaciones.**
- Comentarios

3. Composición de transformaciones

- Permite realizar operaciones complejas como combinación de otras más sencillas. Básicamente refleja el hecho de que para pasar de unas coordenadas a otras podemos aplicar secuencialmente una serie de transformaciones
- Sucesión de operaciones básicas: composición o multiplicación de matrices
- Ejemplo: Rotar un objeto respecto a un punto arbitrario P_1.
  - 1 Trasladar el punto P_1 al origen (T)
  - 2 Rotar el objeto un ángulo θ (R_θ)
  - 3 Trasladar el punto P_1 a su posición original (T^{-1})

La transformación quedaría expresada por el producto de matrices ($T^{-1} R_\theta T$)

Composición de transformaciones

- El orden de ejecución es importante, pues las matrices no siempre cumplen la propiedad conmutativa.
- Casos en los que si se cumple:
  - Traslación. Traslación.
  - Rotación. Rotación.
  - Escalado. Escalado.
  - Escalado (Sx = Sy). Rotación.

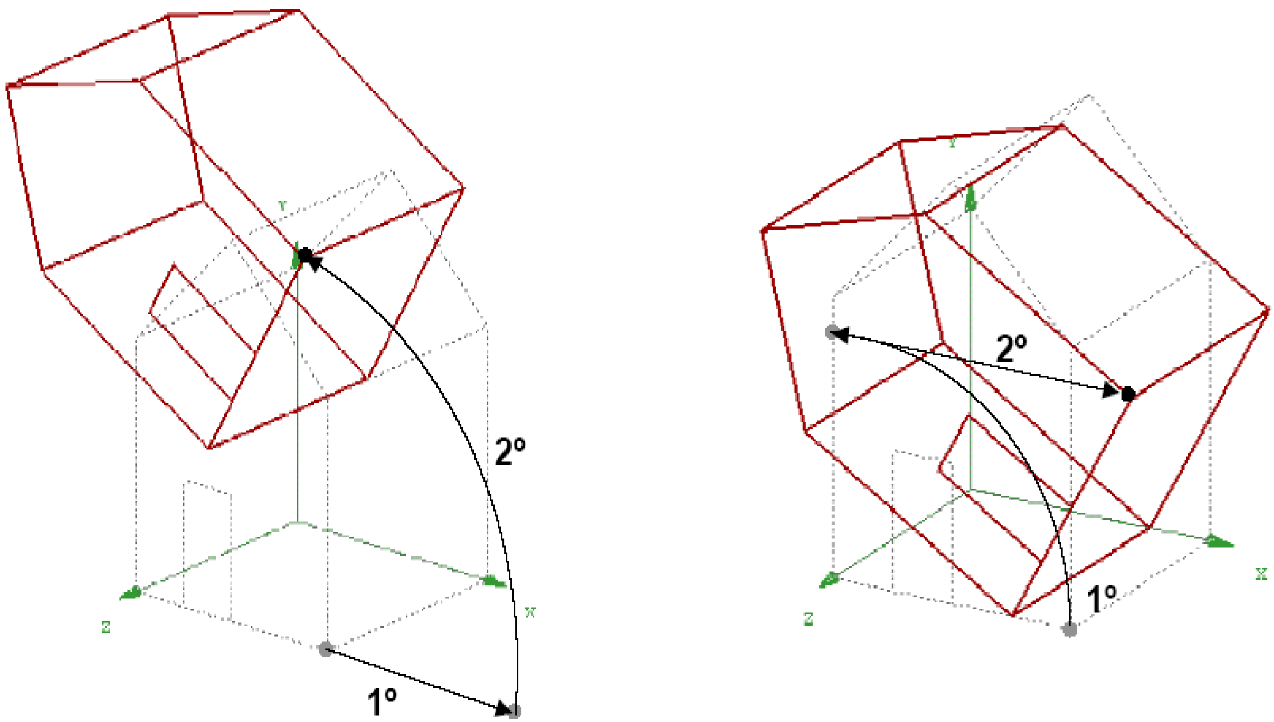
Composición de transformaciones afines 3D

La composición de transformaciones se realiza premultiplicando el punto P por las matrices de transformación.

- Se puede obtener una matriz de transformación global.

- OJO: la composición de transformaciones NO ES CONMUTATIVA.

$$\mathbf{S}\,\mathbf{R}\mathbf{T}p \neq \mathbf{S}\,\mathbf{T}\mathbf{R}\,p$$



Composición de transformaciones afines 3D

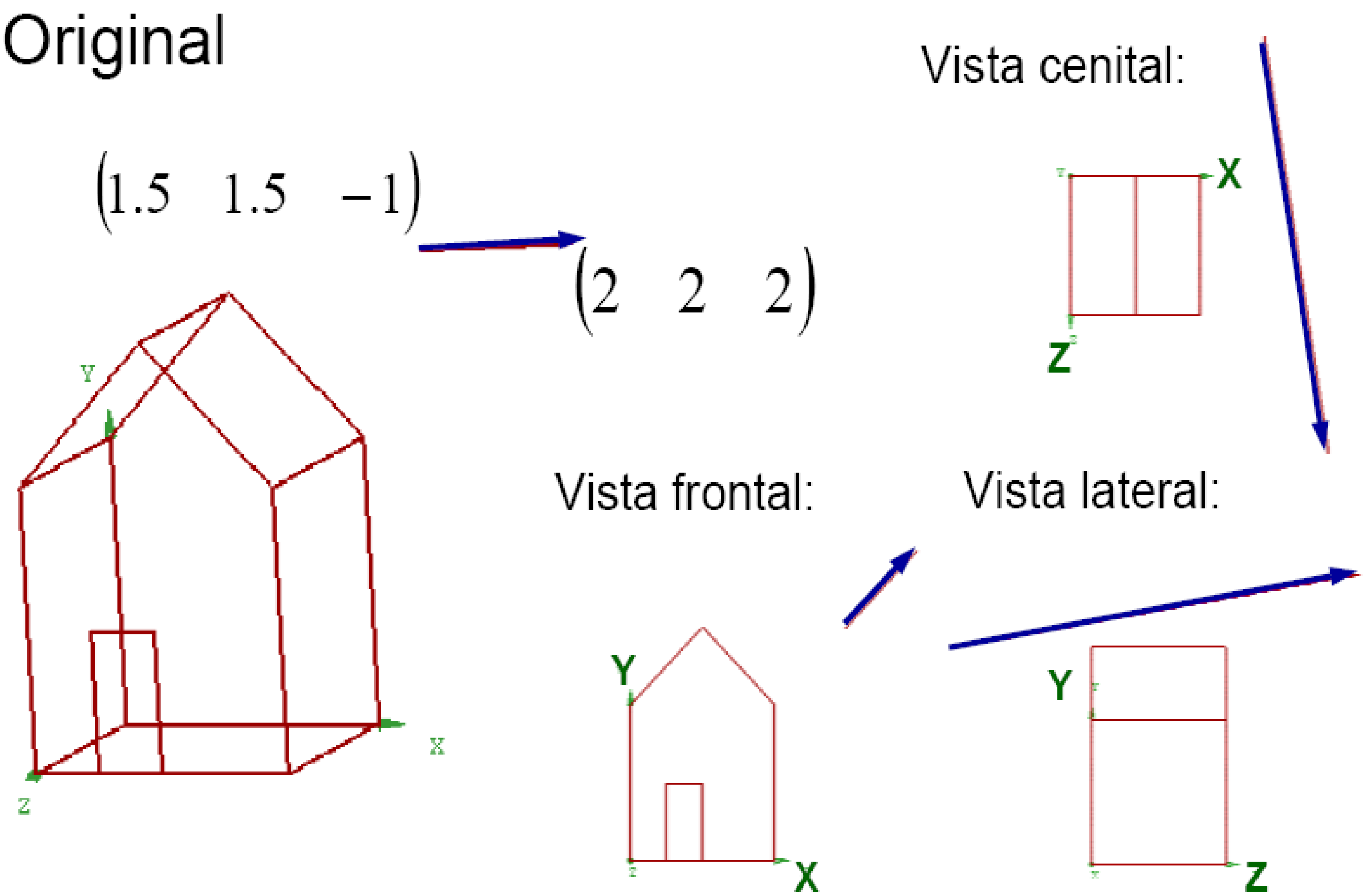
Se han estudiado transformaciones relativas al origen o a los ejes de coordenadas.

Es posible realizar transformaciones relativas a ejes o puntos arbitrarios del espacio.

Será preciso considerar dichas transformaciones como composiciones de transformaciones.

Composición de transformaciones afines 3D

- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

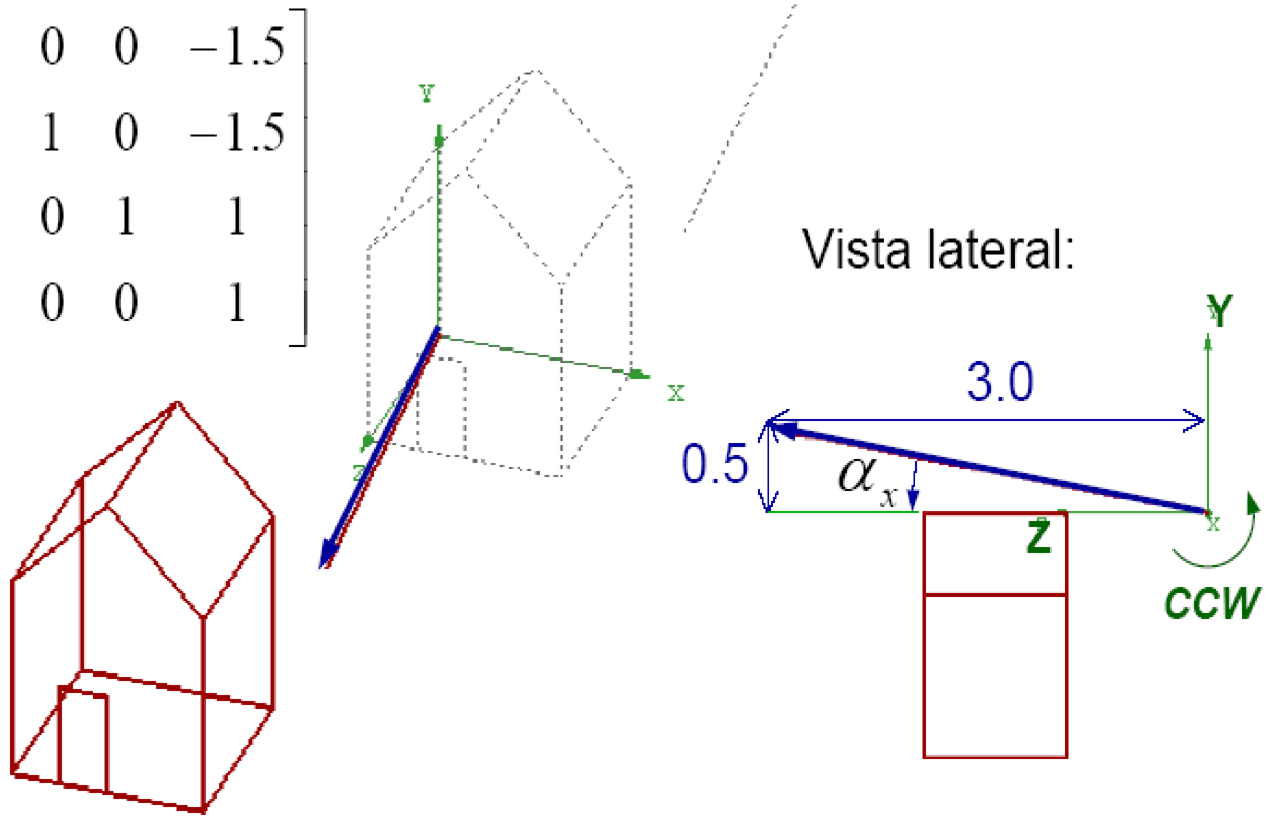


Composición de transformaciones afines 3D

- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

  Trasladamos el eje de giro al origen

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



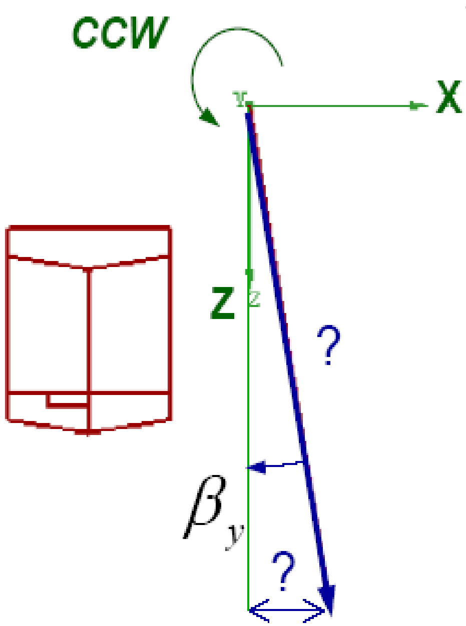
Composición de transformaciones afines 3D

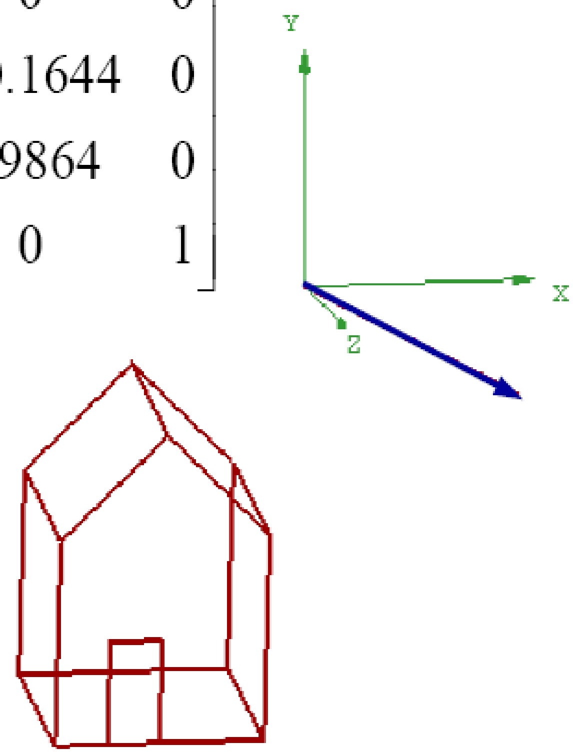
- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

  Después de tumbar eje de giro en el plano XZ

$$\alpha_x = 9.46232^\circ$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9864 & -0.1644 & 0 \\ 0 & 0.1644 & 0.9864 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





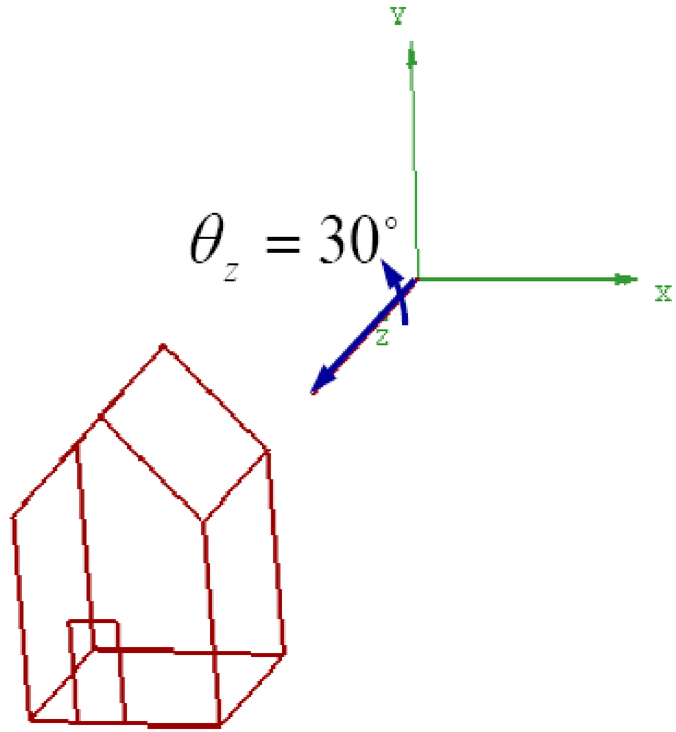
Composición de transformaciones afines 3D

- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

  Después de alinear eje de giro con eje Z

$$\beta_y = 9.33586^\circ$$

$$R_y^{-1} = \begin{bmatrix} 0.98675 & 0 & -0.16222 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.16222 & 0 & 0.98675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\theta_z = 30^\circ$$

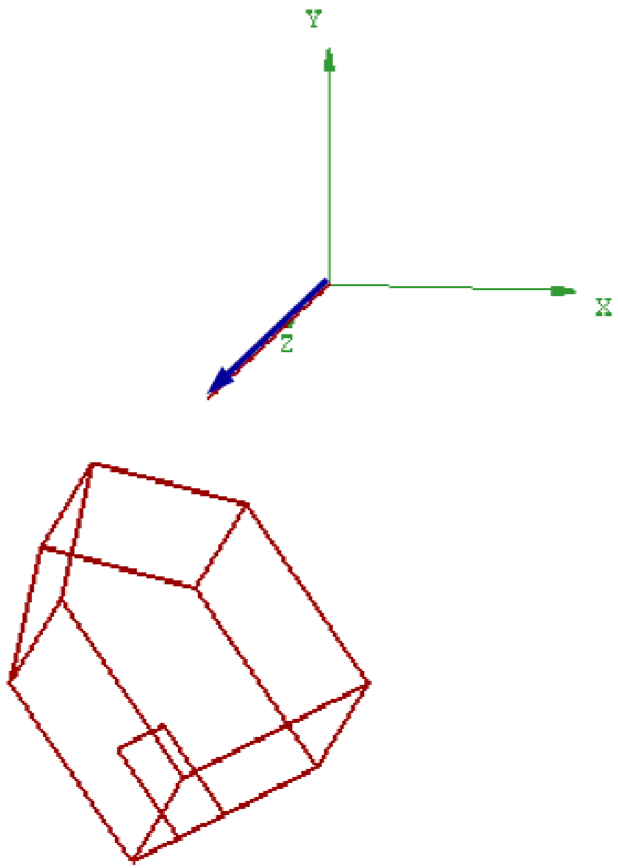
Composición de transformaciones afines 3D

- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

  Tras giro pedido

$$\theta_z = 30^\circ$$

$$R_z = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



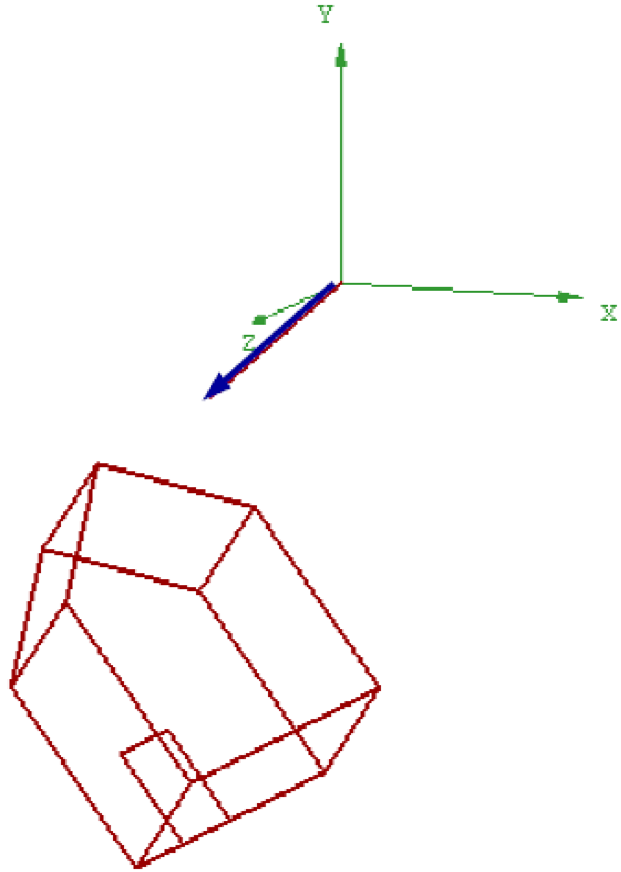
Composición de transformaciones afines 3D

- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

  Tras deshacer segundo giro

$$\beta_y = 9.33586^\circ$$

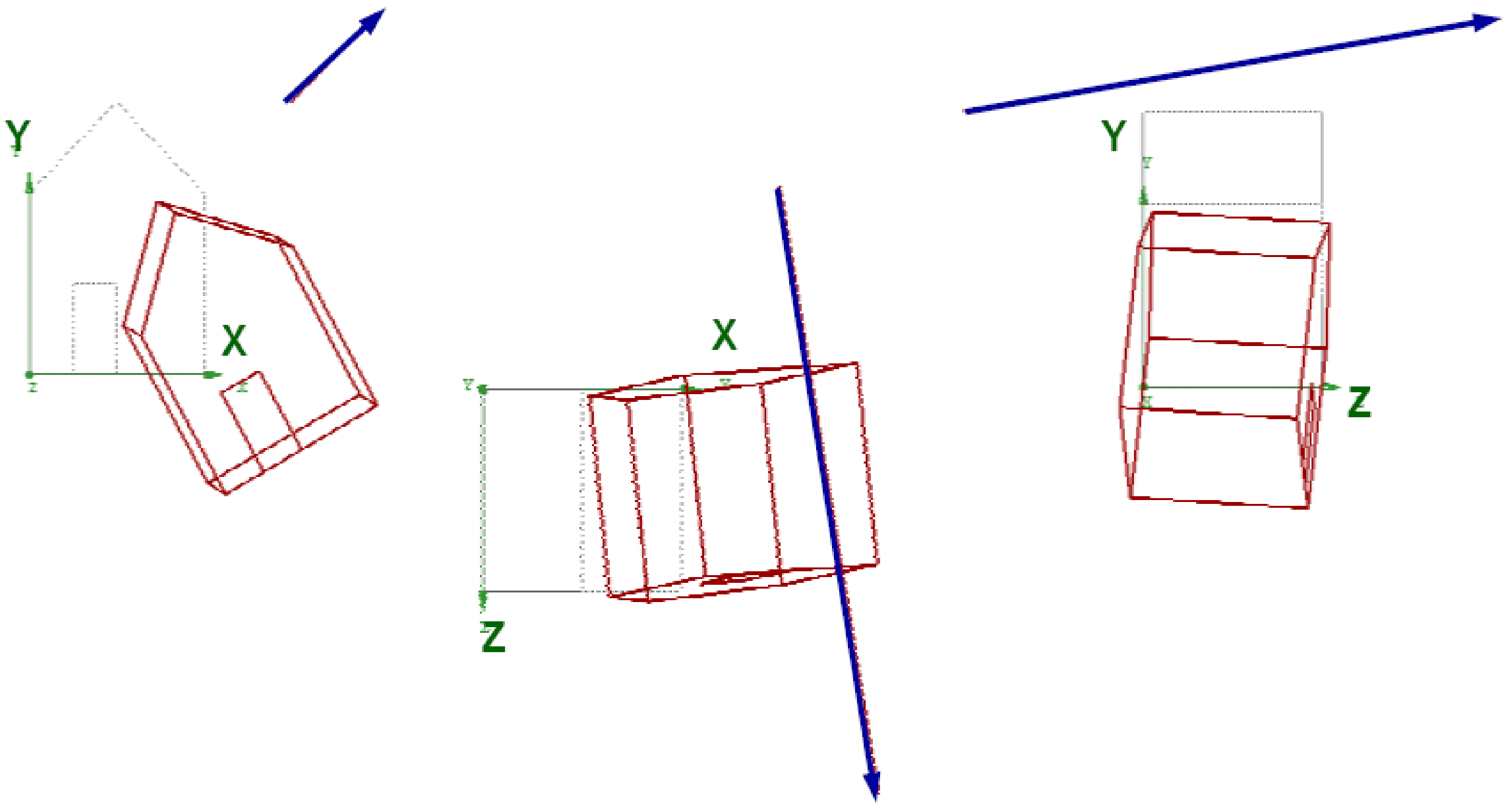
$$R_y = \begin{bmatrix} 0.98675 & 0 & 0.16222 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.16222 & 0 & 0.98675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Composición de transformaciones afines 3D

- **Giro sobre un eje arbitrario 3D**

  Vistas paralelas ejes principales



Índice

- Introducción: Espacios vectoriales, afínes y euclídeos.
- Transformaciones en el espacio afín.
- Composición de transformaciones.
- **Comentarios**

4. Comentarios

La matriz de transformación en 2 dimensiones queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(los coeficientes en r nos darían rotaciones y otras transformaciones: los coeficientes t nos darían la traslación)

Multiplicar una matriz 3x3 por un vector 3x1 requiere 9 multiplicaciones y 6 sumas. Si lo efectuamos directamente, podemos realizarlo con 4 multiplicaciones y 4 sumas, ya que no hace falta calcular el producto de la tercera fila o columna

En tres dimensiones es análogo