

Geometría afín. Transformaciones geométricas.

Índice

1. Introducción: Espacios vectoriales, afines y euclídeos.
2. Transformaciones en el espacio afín 2D
3. Transformaciones en el espacio afín 3D.
4. Composición de transformaciones.

1. Introducción

1. Espacios vectoriales
2. Espacios afines. Puntos. Suma afín
3. Espacios euclídeos. Distancia. Producto escalar. Ortogonalidad y proyecciones. Producto vectorial
4. Representación de líneas y planos.
5. Otros conceptos: envoltura convexa, primitivas 3D, etc.

Espacio vectorial

- Un espacio vectorial se compone de escalares y vectores.
- Definimos las operaciones de suma (escalar y vectorial) y multiplicación escalar-escalar y escalar-vector
- Son operaciones cerradas: sumar dos vectores o multiplicar escalares por vectores nos dan otros vectores
- Además, existen elementos neutro e inverso.
- La multiplicación escalar-vector es distributiva respecto a la suma de escalares y a la suma de vectores

Ejemplos: vectores geométricos, grupos o tuplas de reales en \mathbb{R}^n , etc.

Espacio vectorial

Otros conceptos de interés:

- Combinación lineal de vectores
- Independencia lineal
- Dimensión del espacio vectorial
- Bases de un espacio vectorial
- Representación de vectores en función de una base: coordenadas
- Cambio de coordenadas (atención a la relación entre cambio de bases y cambio de coordenadas; se basan en la transformación inversa)

Espacios afines

Los espacios vectoriales carecen de conceptos como posición y distancia (tenemos vectores, con magnitud y dirección, pero no están fijados a un punto). Tampoco podemos definir un origen.

En los espacios afines nos aparece otra entidad: los "puntos"

Por tanto, en un espacio afín tenemos:

- Escalares
- Vectores: nos definen direcciones y desplazamientos
- Puntos, que nos especifican posiciones en el espacio

En un espacio afín podremos definir sistemas de referencia asociados a un origen concreto

Espacios afines (2)

Definimos dos operaciones nuevas:

- Substracción de puntos **P-Q**: origina el vector \underline{v} que va de **Q** a **P**
- Adición punto-vector: en el caso anterior, $\mathbf{P} = \mathbf{Q} + \underline{v}$
- No está definida la suma de puntos (aunque sí algo que podemos considerar como un tipo especial de suma que llamaremos *suma afin*)
- Ahora podremos definir una base en el espacio afin, constituida por un origen **O** y una base del espacio vectorial asociado. En ella tanto puntos como vectores podrán ser representados (teniendo representaciones únicas)

Sistemas de referencia (espacio afin)

Necesitamos un punto (**O**, origen) y una base del espacio vectorial (\underline{i} , \underline{j} y \underline{k})

Cada punto y vector tiene una representación única. Por ejemplo, para 3D:

- Vectores: $\underline{v} = x \cdot \underline{i} + y \cdot \underline{j} + z \cdot \underline{k}$ (\underline{i} , \underline{j} y \underline{k} son vectores unitarios en las direcciones de los ejes X , Y y Z)
- Puntos: $\mathbf{P} = a \cdot \underline{v} + \mathbf{O} = a x \cdot \underline{i} + a y \cdot \underline{j} + a z \cdot \underline{k} + \mathbf{O}$
- Se pueden utilizar sus coordenadas, que para el vector \underline{v} serían $(x, y, z, 0)$, y para el punto **P**, $(a x, a y, a z, 1)$
- **NOTA:** representamos un punto 3D por **4 coordenadas**
- Se pueden tomar los vectores como equivalentes a un punto en el infinito (lo estudiaremos al ver las coordenadas homogéneas)
- Podemos definir sistemas de referencia de *mano derecha* y de *mano izquierda*

Espacios euclídeos

Necesitamos todavía otros conceptos, como los de distancia y ortogonalidad. Para ello, definimos el *producto escalar* de vectores:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\theta)$$

(θ : ángulo formado por \underline{u} y \underline{v})

Propiedades del producto escalar:

- Conmutativa y asociativa (respecto a la suma de vectores y multiplicación por un escalar)
- Si $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v} \cdot \underline{v} > 0$; $\underline{0} \cdot \underline{0} = 0$
- Si $\underline{u} \cdot \underline{v} \neq 0$ y $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ambos vectores son ortogonales
- El producto escalar nos permite calcular la distancia entre dos puntos (mediante el producto escalar del vector que los une) y el ángulo entre dos vectores

Espacios euclídeos (2)

El producto escalar nos permite:

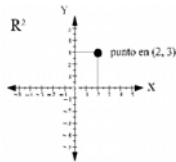
- Calcular la distancia entre dos puntos (mediante el producto escalar del vector que los une) y el ángulo entre dos vectores
- Descomponer un vector \underline{u} en sus componentes paralela y ortogonal a otro \underline{v} (si tomamos un vector unitario en la dirección de \underline{v} , su producto escalar con \underline{u} nos da la proyección de \underline{u} sobre \underline{v} y su diferencia con \underline{u} , nos da su componente ortogonal a \underline{v})
- Hallar la mínima distancia entre un punto y una recta (podemos descomponer el vector que une el punto en cuestión con cualquiera de los de la recta en la componente normal al vector colineal con la recta)

Otros conceptos

- Producto vectorial de dos vectores: Nos permite obtener otro vector normal al plano definido por los otros dos
Módulo: $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \text{sen}(\theta)$
Dirección: perpendicular al plano definido por \underline{u} y \underline{v}
Sentido: regla del “sacacorchos”
- Sumas afines. Representación de segmentos y polígonos convexos
- Envolturas convexas
- Ecuaciones de líneas y planos
- Tratamiento de otras primitivas 3D (líneas y superficies curvas)

2. Transformaciones en el espacio afin 2D

Sistema de referencia en 2D:



Puntos y vectores: se representan mediante dos o tres coordenadas:

- \mathbf{P} : $(x, y, 1)$ o bien (x, y)
- \mathbf{v} : $(x, y, 0)$ o bien (x, y)
